我 的 教 与 学

(Teaching and Studying in my Life)

陈维桓

北京大学数学科学学院

2023 年 7 月

摘要. – 我把历年来发表在各处的文字收集在一起，其中有我对几位老师的怀念和回忆，反映了我学习微分几何的过程. 也有写在几种教材中的前言和绪论，反映了我对微分几何的理解以及对于教学的一些看法和做法. 经过改革开放的四十年，当今中国的数学已经大大地不同于文革刚结束时的状况，我所记述的一些情况从一些侧面反映了老一辈数学家为我国数学进步所做的努力.

目　　录

谈谈微分几何

微分几何是一门既古老又年轻的学科. 说它是古老的, 因为它最早所关心的问题, 诸如求曲线的长度、求曲面的面积等等, 曾经是微积分的发明在几何方面的动力. 说它是年轻的, 因为自 20 世纪以来, 微分几何的新概念、新方法层出不穷, 使得它本身尚有许多问题待解决, 并且它又为其它数学领域及理论物理提供了各种空间模式和研究工具.

经典微分几何学的研究对象首先是我们所处的三维空间中的曲线和曲面. 在 18 世纪, Euler 和 Monge 及其学生对于曲线和曲面的研究做出了决定性的贡献. 例如, 曲面在一点沿各个切方向上的法曲率的变化规律是 Euler 发现的 (即 Euler 公式). 曲线论的局部理论是由 Serret 和 Frenet 在 19 世纪 50 年代完成的. 在曲面论的研究方面, 真正的突破是由 Gauss 在 1872 年做出的. Gauss 经过复杂的计算发现, 曲面的总曲率 (即曲面在一点的两个主曲率的乘积) 是由曲面的第一基本形式决定的; 换句话说, 如果两个曲面在对应点有相同的度量性质, 则这两个曲面在对应点有相同的 Gauss 曲率. 根据 Gauss 的这个定理, 球面和平面是不可能建立等距对应的. Gauss 的这个精彩结果表明曲面和曲线有本质上的区别, 曲面的度量本身就蕴含着一定的弯曲性质.

把 Gauss 的结果发扬光大的是 Riemann. 他认为欧氏几何、非欧几何在平行公设上不同的根源在于空间的度量的不同. Riemann 提议在抽象的变量空间中引进一个正定的二次微分形式作为度量, 并且研究它的局部几何性质. Riemann 的理论后来由 Christoffel、Ricci 发展成一整套张量分析的算法. 在 19 世纪后半期, F.Klein 总结了当时非欧几何和射影几何的发展, 提出: 几何学的主要问题是研究变换群的不变量; 这就概括地说明了各种几何学的区别和联系, 并且启示了可能的新几何学. 用现代的话来说, 几何学的主题是“对称性”.

使张量分析和黎曼几何引起广泛兴趣的是 Einstein 关于广义相对论的工作. 这样, Riemann 所创造的抽象的几何空间成为相对论物理演出的舞台. 之后, Levi-Civita 引进了向量的平行移动的概念, 赋予黎曼几何一个更加直观的意义, 并且能够用来描述空间的曲率, 从而显现了欧氏空间和非欧空间的本质区别.

在近代微分几何发展中融合 Riemann 与 Klein 的工作于大成的一位大师是 E.Cartan, 他精巧地发展了外微分法和活动标架理论, 把李群和微分几何结合起来, 提出“一般 (联络) 空间”的理论, 特别是透彻地研究了对称空间的性质和分类.

在步入 20 世纪 40 年代之后, 微分几何的一个发展趋势是所谓的大范围微分几何, 作为它的基础的是微分流形的系统理论.

当前, 微分几何研究的一个方面是黎曼流形的整体结构. 关于某种曲率取一定符号的黎曼空间的研究已有相当多的结果, 但是这方面还有待更深入的开拓. 再一个方面是黎曼流形 (特

别是一些特殊黎曼流形) 内的子流形理论, 注意力比较集中的是极小子流形的理论. 此外, 微分几何与数学物理的结合是微分几何的发展和应用的最重要的一个方向. 当前已有相当深入结果的是调和映射、规范场理论. 在理论物理中正在崛起的的超弦理论可能是微分几何能施展本事的新领域.

微分几何除了在理论上有广阔的发展前景之外, 在生产实践中也有广泛的应用. 特别是随着计算机图形学的发展, 各种复杂精美的外形设计已大量地用于生产. 在这方面, 经典的微分几何是这些应用的基础知识, 应该得到广泛的重视和普及.

(原载于北京科技报, 第 1106 期, 1988 年 11 月 2 日)

《微 分 几 何 讲 义》评 介

《微分几何讲义》获得了全国高等学校优秀教材特等奖, 消息传来使我十分激动. 这个荣誉是属于陈省身教授的, 我作为协作者能为这本书贡献微薄的力量自然也感到无限欣慰.

众所周知, 陈省身先生是国际上著名的数学家, 他在微分几何方面的杰出成就使他跻身于大几何学家的行列. 他是继 E.Cartan 之后对几何学的发展施以重大影响的最伟大的几何学家. 陈省身关于 Gauss-Bonnet 定理的内在证明开创了大范围微分几何的新纪元, 他在微分几何各个方向的孜孜不倦开拓、进取和引导使得微分几何成为当代数学的一个主流. 著名数学家 I.M.Singer 说:"对于我们大多数人来说, 陈省身就是现代微分几何"(The Chern Symposium 1979, Springer-Verlag, 1980). 这种评价一点都不为过. 确实如此, 我们对于 E.Cartan 的外微分和活动标架方法的了解, 首先是通过陈省身的论文获得的. 40 多年来微分几何各个方向的发展无一不和陈省身的努力有关. 陈省身不仅是伟大的数学家, 而且是伟大的数学教育家. 他所撰写的著名的讲义有:

(1) Topics in Differential Geometry, Institute for Advanced Study, Princeton, 1951.

(2) Differentiable Manifolds (mimeographed), Univ. of Chicago, 1953.

(3) Complex Manifolds, University of Chicago, 1956; University of Recife, Brazil, 1959.

(4) Complex Manifolds without Potential Theory, D. Van Nostrand, Princeton, 1967; Springer-Verlag, New York, 1979.

(5) Minimal Submanifolds in Riemannian Manifolds, University of Kansas, 1968,

等等. 这些讲义训练和培养了好几代拓扑学家和几何学家. 所以我们要说,《微分几何讲义》一书能够引起国内的广泛注意和高度评价, 首先是与陈省身教授对于几何学作出的历史性贡献分不开的.

陈先生把振兴祖国的数学事业作为他晚年的最主要的奋斗目标. 他以 70 多岁的高龄频繁地奔波于太平洋两岸, 不辞劳苦地积极筹划祖国的数学研究布局和计划, 把国际上一流数学家不断地介绍到国内来, 目的就是希望国内新一代的青年数学家能尽快地成长起来, 使国内的数学研究水平尽早地接近或赶上国际水平. 1980 年 5 月, 陈先生应邀到北大开设"微分几何"课程正是在这个背景下所采取的一个大步骤. 这次开设课程与他自 1972 年以来历次回国讲学相比有明显不同的特点: 首先, 这个课程面向从全国各地来的年轻的研究生和数学工作者, 不只是几何方面的专家; 其次, 这个课程面向数学的各个分支的学生, 而不只是局限于微分几何方向的学生; 另外, 还有不少从事力学、物理学的研究工作的专家前来听课. 这些特点决定了课程的基础性和广泛性. 因此, 陈先生所选定的题目是"流形论". 实践证明, 陈先生的选题是正确的. 这首先有助于国内的数学研究从经典的局部理论向大范围理论的转变, 促进了现代数学和力学、物理学等相近学科的相互渗透和交织的作用. 更重要的是, 陈先生的课程大大地激发了

新一代青年数学家的迅速成长. 十年内乱使我国的人材培养工作造成了一个空白时期, 国内急需的是各类人才. 在 1980 年参加陈先生开设的"微分几何"课程的学生主要是文革以后恢复招生的首批数学研究生. 目前, 这批人中有不少人获得了国内、国外的博士学位, 不少人成为教授、副教授, 他们已经成为当前我国从事数学研究和数学教学的骨干力量. 因此, 陈先生 1980 年在北大开设"微分几何"课程是具有深远意义的一件大事. 《微分几何讲义》是根据陈先生的讲课记录整理而成的. 因此, 它的特点首先是选材适当, 着眼于基础. 这本书系统地论述了流形论的基础, 介绍了微分流形上的各种几何结构. 可以说, 这是国内用中文出版的第一本系统地论述大范围微分几何基础的教材, 因此它的影响无疑是大的.

在《微分几何讲义》一书整理成稿过程中, 除了主要依据陈先生的讲课记录之外, 还主要参考前面所提到的陈先生的两本著名的讲义 (2) 和 (4). 我们知道, "流形"这个术语在 Riemann 于 1854 年的著名论文中已经出现了, 但是它的概念的定格化则是 20 世纪 40 年代的事. 在陈先生的《Gauss-Bonnet 定理的内在证明》一文发表之后, 大范围微分几何的研究成为一个主流, 吸引了众多的杰出数学家从事这方面的工作. 但是, 系统地讲述大范围微分几何基础的教科书首推陈先生的讲义《Differantiable Manifolds》(即前面提到的讲义 (2)), 该讲义由浅入深地介绍了微分流形、外微分、联络、黎曼流形等内容, 赋予这些概念以清澈明晰的现代化处理, 超越了经典的黎曼几何教材的范畴 (例如：1926 年 Eisenhart 的《黎曼几何》等等). 直到 20 世纪 60 年代, 国际上才陆续出版了许多大范围微分几何的教科书, 而它们无一不以陈先生的这本讲义为蓝本. 时至今日, 不少数学系研究生仍以陈先生的这本讲义作为微分流形的入门书 (例如, 在伯克利加州大学数学系图书馆, 这本讲义是借用次数最多的书籍之一). 原因就在于讲义陈述了一位大几何学家对于事物的看法和处理, 要学习就要从大家的最有创见的著作中去吸收营养. 现在, 《微分几何讲义》充分吸收了讲义 (2) 和 (4) 的精华, 使陈先生的一贯风格能得以体现.

另外, 陈先生在讲课中格调是很高的. 他对每一讲的讲法都经过深思熟虑, 因此不少处理方法与讲义《Differantiable Manifolds》是有区别的, 切空间和余切空间的引进就是一个典型的例子. 陈先生对于每一讲所包含的数学都有自己的研究心得. 比如：第一章的 Frobenius 定理的证明是如此漂亮和干净, 实际上它是陈省身和 J. Wolfson 的一篇论文的内容；第二章的定理 3.6 原来是陈先生的一篇论文中的一个引理, $G(2,4)$ 的拓扑结构也见于陈先生的另一篇论文 (l'Ens. Math.,40(1955)). 后面的 Stokes 公式的证明, 联络形式的矩阵表述, Gauss-Bonnet 定理, 曲面上等温坐标系的存在性, 复流形的几何等等的处理都包含了陈先生的独到见解. 因此, 读陈先生的书不仅是学习知识, 而且可以学习做学问的方法和态度.

《微分几何讲义》作为数学系研究生的微分几何的入门教材, 在各章的处理方面是很严肃的. 特别是对于各章所介绍的主要概念和主要定理都经过审慎的考虑, 定理的证明是完整的、严格的, 不回避难点. 并且, 前面各章的主要定理尽可能在后面各章得到应用, 以增加读者的印象和理解力. 因此, 这本书对于学生的自学是方便的, 而且有助于他们树立严谨的学风.

这本书除了正文之外, 还收进陈先生的论文《欧氏空间中的曲线和曲面》作为附录 1. 这是陈先生的一篇极其有名的文章, 它系统地论述了三维欧氏空间中大范围曲线论和曲面论的一些最基本的定理. 在这些基本论题中, 陈先生本人曾经做过辛勤的耕耘, 取得过丰富的成果, 这在该文所引用的参考文献中可以看得出来. 这篇文章的取材和提供的证明对于后来出版的曲线、曲面的微分几何教科书都有深刻的影响 (例如: Klingenberg 的《A Course in Differential Geometry》及 do Carmo 的《Differential Geometry of Curves and Surfaces》).

另外, 陈先生还特地写了《微分几何的过去和未来》一文作为本书的序, 并且把另一篇论文《微分几何与理论物理》收为本书的附录 2. 这两篇短文值得细细揣摩. 在前一文中, 陈先生以寥寥数语勾画了微分几何历史发展的概况, 接着指出"将来数学研究的对象, 必然是流形", "流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而不变的性质". 这个指导性意见是对于当前数学研究主流的一个概括, 也必然会被未来数学的发展所证实. 在后一文中, 陈先生强调了几何学与物理学之间的相互交融、彼此促进的关系. 在文中提到的几个具体课题在近几年里已有飞速发展. 例如 $P_n(\mathbb{C}), SU(n), Q_n(\mathbb{C})$ 或 $G(n,k)$ 中的二维极小曲面理论在最近有很大进展. 陈先生曾为 A.Weil 的一本专著题词"老马识途"作为对他的的赞语. 这个题词也完全适用于陈先生本人. 可以肯定, 我国的数学研究在陈先生的倡导下一定会有光辉的前途.

当然, 每一本书都不可能是尽善尽美的. 这本书作为教材来说, 习题的配置显然是不足的. 另外, 在本书整理成稿的过程中, 陈先生几次来信指出"有些地方 (尤其是第 6, 7 章)⋯⋯ 叙述嫌简略, 初学者阅读不易"; "有点觉得书病在简略, 怕难读, 如能加一些附录作补充, 当可补救缺点". 这些问题当然与我作为协作者的水平有关. 回想起在整理书稿时, 我担当了相当大的风险. 在十年内乱中, 我完全脱离了现代数学领域; 在 1980-1981 年做这项工作时, 我既没有从事微分几何研究的经验, 也没有从事微分几何教学的经验, 因此要完美地完成这项任务是困难重重的. 好在有陈先生的直接指导, 有陈先生的众多讲义和文章可供参考, 因此在初稿中出现的一些问题逐步得到改善. 尽管在有些地方由于我的原因还可能留有比较幼稚的痕迹, 但从总体而言, 这本书还是为大家所接受了. 在这里我要对吴光磊教授表示感谢. 早在 20 世纪 60 年代, 吴先生在北大数学系就开设了流形论的课程, 介绍了陈先生关于 Gauss-Bonnet 定理、纤维丛和联络论的工作. 正是这些课程给我打下了基础. 另外, 在本书整理成稿的过程中也得到过吴先生许多具体的意见, 帮助不少.

教材建设是一项长期的任务, 而好的教材是提高教育质量的关键, 是培育优秀人才的保证. 陈省身教授为我们树立了一个典型: 优秀的科学家也应该是出色的教育家. 只有把自己的经验和科学进步结合起来, 热情地倾注于培养年轻的一代, 我们的事业才能兴旺发达起来.

(陈省身, 陈维桓:《微分几何讲义》, 北京大学出版社, 1983 年 12 月第一版. 此书在 1987 年获全国高等学校优秀教材特等奖. 本文原载于《高等学校优秀教材评介文集》, 高等教育出版社, 1989 年 1 月.)

《微分流形初步》前记

在数学的发展过程中，综合与分析的方法始终是一对矛盾的两个方面. 当前，在数学的各个分支学科已经分得很细的状况下，势头看来是朝着在更高层次的综合方向发展. 最有希望的是交叉学科、边缘学科，在这里，几何学起着基本的作用. 普遍认为在数学系本科的教学计划中应充实和加强几何学内容. 几何学不仅广泛用于复分析、非线性分析、偏微分方程、拓扑学、微分拓扑学、概率论、随机过程、数学物理和力学等等分支学科，反过来这些分支学科也大大促进了几何学本身的发展. 黎曼几何自 1854 年问世以来，已经历了差不多 150 年，它在广义相对论中有成功的应用. 特别是本世纪 30 年代以后，大范围微分几何登上了舞台，其里程碑就是陈省身关于黎曼流形上 Gauss-Bonnet 定理的内在证明. 自此以后，微分流形、纤维丛理论成为数学工作者应该具备的知识. 陈省身教授 1953 年在芝加哥大学开设的课程和讲义《微分流形》(见参考文献 [17]) 在相当长时间内成为学习微分几何的蓝本，好几代几何学家就是在陈省身教授的课程和讲义的影响下成长起来的. 他在 1978 年在北京大学开设的"微分几何"课以及随后出版的《微分几何讲义》(见参考文献 [2]) 在我国培养新一代数学工作者的过程中起着同样重要的作用.

北京大学数学科学学院有很多专门方向都以微分流形的知识为基础，因此很多专门方向的课程在开头部份都要单独讲一段"微分流形".1990 年北京大学数学系在修订教学计划时把"微分流形"列为数学系各个专业本科生的选修课，目的是把这部份内容作为各个专门方向的公共基础，一方面避免了不必要的重复，使得各个专门方向的课程可以提高它们的起点，另一方面把这部份内容从研究生课程下放到本科，加强了数学系本科的几何学教学. 我们对于这门课的设想是介绍微分流形的基本概念和例子，使学生熟悉微分流形上光滑切向量场、外微分式的性质和运算，并初步了解微分纤维丛等概念. 用一句不很贴切的话来说，这是关于微分流形上的微积分的一门课. 学习的重点是如何处理在微分流形上大范围定义的对象.

经过多年的实践，我们觉得把陈省身、陈维桓著的《微分几何讲义》(即 [2]) 一书中的一、二、三、六等章作为本课程的教学内容是适当的. 目前这本讲义就是以此为基础结合多年的教学实践写成的. 考虑到这门课是为本科高年级学生开设的，也可供研究生一年级选用，我们尽可能把概念表述得比较具体，比较直观，更多地与欧氏空间中已经熟悉的概念联系起来. 例如，在本书我们把光滑流形上的光滑切向量场定义为在光滑流形上每一点都指定了一个切向量，并且当它在局部上用自然标架线性表示时，其分量是局部坐标的光滑函数. 这样的概念与我们平常对于光滑切向量场的了解是一致的. 然后，在此基础上把光滑切向量场看成作用在光滑函数上而获得光滑函数的映射. 后者是现在所流行的关于光滑切向量场的不用坐标的定义. 当然，后一种说法有很多应用；但是，前一种讲法更加直观，更贴近我们已有的知识. 我们的目标之一

是建立这两者之间的联系. 在当前的文献中，无坐标的处理似乎成为一种时尚. 但是我们认为，至少是在基础课上，采用局部坐标的讲法有助于学生理解抽象概念的实质，也有利于提高学生的计算能力. 我们在本书采用两者相结合的办法，重点是强调局部坐标的功用.

"微分流形"课作为周学时为 3(或 4) 的一学期课程，要讲完本书的全部内容显得有些困难；况且我们在有些章节的最后时常提到一些有关的重要概念和结论，没有作详细的解说，目的是为读者了解这个课程的应用及后续发展有一些帮助. 因此，我们建议"微分流形"课的内容由以下章节的主要部分组成：

第一章，
第二章　§1-§4, §6,
第三章　§1-§4,
第四章　§1-§3, §5,
第六章　§1, §2, §5.

其余部份可以作为自学和参考的材料."黎曼几何"课的内容可以由下列章节组成：

第一章，
第二章　§1-§4, §6,
第三章　§1-§5,
第四章　§1-§3, §5,
第五章.

陈省身教授在"微分几何的过去与未来"一文 (见 [2]) 中指出: "要研究整个流形，流形论的基础便成为必要. 流形内的坐标是局部的，本身没有意义；流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质 (如切矢量，微分式等). 这是与一般数学不同的地方. 这些观念经过几十年的演变，渐成定型. 将来数学研究的对象，必然是流形；传统的实数或复数空间只是局部的情形 (虽然在许多情形下它会是最重要的情形)."

本书的写作是在首届国家教委理科教学指导委员会几何、拓扑教材编审组的推动下完成的. 全书的纲要及第一章–第四章的初稿曾分别经过几何、拓扑教材组的讨论. 作者在此对几何、拓扑组组长胡和生院士及全体成员表示衷心的感谢. 在本课程的设计和形成的过程中得到北京大学数学科学学院姜伯驹院士，钱敏教授，郭懋正教授，张筑生教授的关心、支持和建议；另外，文兰教授，刘张矩教授也分别讲过该课程，提供了不少宝贵的意见和经验，作者对他们表示深切的感谢. 莫小欢博士也仔细地阅读过本书第一章–第四章的初稿，并且提出了一些改进意见，作者在此表示感谢. 在本书交稿之后，复旦大学数学系潘养廉教授对全稿作了仔细审阅；责任编辑胡乃炯对全书的编辑付出了辛勤的劳动，作者对他们表示感谢. 最后，本书在写作和修订过程中得到国家自然科学基金会的支持 (项目号 19571005 和 19871001)，在印成内部讲义时得到北京大学教材建设委员会的支持，使得本书的写作和内部讲义的印刷能顺利地进行，在此对他们一并表示感谢.

本书的第一版在 1998 年问世后，受到数学界和教育界的广泛重视. 现在，本书由教育部推荐为全国研究生数学教材，作为第二版重新出版. 尽管本书的内容在北京大学讲过多次，而且已经过认真的订正和修改，但是限于作者的水平，本书中需要改进之处、不妥当之处、甚至于错误都可能是存在的. 作者诚恳地希望读者能不吝指正.

(陈维桓:《微分流形初步》, 高等教育出版社, 2001 年 8 月第 2 版)

关于在大学数学教学中加强几何教学的几点意见

在大学数学教学中比较普遍地存在着几何课程和内容萎缩的现象. 这种现象的出现已经有相当长的时间了, 而且包括相当一部分高等学校的数学专业 (除了某些师范院校), 以及几乎全部高等学校的非数学专业的数学课程教学计划，都有这种情况发生. 在大学数学教学中几何教学的内容只剩下空间解析几何, 而其目标也缩减成对于空间中简单形体的了解和描述，满足于使学生能够示意性地画出积分区域. 这种状况与当代数学发展的现状完全是脱节的，和提高学生的数学素质的要求也是不符合的. 因为几何学过去是、而现在仍然是人类认识客观世界的一门重要学科, 数学的其他学科和数学以外的学科的发展也常常需要用几何学的观点进行观察和处理，需要用几何学的语言. 此外，几何学中的各种空间、特别是微分流形概念的建立为各种数学的展开提供了适当的基础和舞台. 在重点大学的数学专业，近 20 年来，这种情况已经有所改变. 在大学数学专业应该加强几何课程教学，已经成为比较普遍的共识，而且在课程设置方面增加了拓扑学和微分流形等课程. 但是，在大学非数学专业的教学中几何学遭到排斥的状况仍没有什么改变. 往往在“形”和“数”的教学中，偏重于“数”的处理，而忽略“形”的意义. 造成这种情况的原因有由历史因素造成的现实条件的局限 (包括缺乏几何方面的师资，缺乏适用的教材)，但是最根本的还是对几何学是什么、要不要加强几何教学以及加强什么样的几何教学需要有普遍的共识，缺乏对解决这个问题的紧迫感. 我打算结合自己长期从事几何学课程教学的经历，谈谈关于加强几何教学的看法，以期引起在座各位专家的重视和讨论. 我想，只有大家重视这个问题，才能把解决这个问题提到日程上来.

1．几何学发展史中的三件大事

在几何学的发展过程中有三件大事，对数学的发展和人类思想的进步产生重大的影响，它们是：在公元前 300 年，欧几里德撰写《几何原本》；在 17 世纪，笛卡尔和费马发明坐标法，开始对坐标几何的研究；在 19 世纪，罗巴切夫斯基、鲍耶和高斯提出“非欧几何”.

欧几里德的《几何原本》集古希腊数学的大成，借助于演绎推理，展现给人们一个完整的典范的学科体系. 它从定义、公设、公理出发，一步一步地、由表及里、由浅入深地推证出大量丰富的结果，成为后来两千年间经典的教科书. 时至今日，初等平面几何仍然脱离不开《几何原本》的体系，成为进行数学逻辑推理训练的范本. 欧几里德《几何原本》的影响远远超出了几何学本身. 在数学发展的漫长过程中，仿照《几何原本》的模式成为建立算术、代数、分析的严格基础的推动力之一，是公理化方法的雏形. 此外，《几何原本》在社会生活和政治生活中也有深远的影响.

笛卡尔和费马引进了 2 维和 3 维的坐标系和坐标方法，建立了平面和空间中的点与有序数组之间的对应，从而把几何图形和它上面的点所满足的方程对应起来. 这就开辟了用代数方

法以及后来发明的微积分方法研究几何图形的性质和相互关系的途径. 同时，反过来，2 个变量或 3 个变量的方程式可以想象成平面上的曲线，或空间中的曲面. 因此，笛卡尔和费马的解析几何为微积分的诞生创造了条件. 笛卡尔和费马的坐标几何赋予空间新的内涵，拓展了空间的意义，为几何学及数学的其他学科的发展搭建了新的舞台.

虽然在《几何原本》诞生之后的两千年间，人们始终相信欧几里德几何是对于现实世界的物理空间的正确的理想化，但是第五公设（即平行公理）过于复杂，缺乏其他公理具有的那种说服力. 因此不少数学家试图用欧几里德的其他九条公理以及与平行公理无关的定理来证明第五公设. 在这些人物中有托勒密、勒让德等著名数学家，但是结果都失败了. 这种长期的失败逐渐导致人们猜想在欧氏几何以外可能还有其他种类的几何学. 首先获得在逻辑上可行的非欧几何学的人是高斯（约在 1794 年到 1817 年间），但是首先发表非欧几何学研究论文的是罗巴切夫斯基（从 1829 年到 1837 年）和鲍耶（他的论文作为附录发表在他父亲在 1831-1833 年出版的书里）. 他们三人都认识到欧氏几何平行公理不能在其余九条公理的基础上进行证明，而且认识到加上平行公理对于建立欧氏几何是必需的. 他们放弃第五公设，进而假定过直线外一点有无数条直线与之不相交，照样能够发展出一种几何学，即非欧几何学.

这三件大事不仅是数学发展史上的大事，也是人类思想发展史上的大事. 当然，它们对于数学研究和数学教育的改革必然会产生巨大的影响. 但是从过去五十年间发生的情况来看，它们对于几何教学产生的影响往往是负面的. 例如：

(1)"欧氏几何"过时论，特别是以《几何原本》为范本的初等几何学处于被抛弃的边缘. 在国际上，在 20 世纪 60 年代曾经出现过"新数学"，它强调数学的结构，从朴素的集合论开始，并且通过集合论运算对学生进行初步的逻辑训练. 结果是，新数学的教学效果并不理想，反而使得学生认为数学更枯燥，对数学更加望而生畏. 在我国，从 1958 年开始教育革命中，欧氏几何体系也首先受到冲击. 当然，教育革命的重点是解决理论和实践相结合的问题. 然而，在当时欧氏几何的形式逻辑体系却被认为是对人们思想的桎梏，是束缚人们思想的象牙塔. 后来，在中学数学课程的设置中，几何与代数分而又合，合而又分，经历了多个回合. 现实的效果是有关几何的内容和课时越来越少，对几何课的教学要求越来越低. 普遍反映，中学毕业生的逻辑推理能力不够.

（2）重视解决问题的数学方法的教学，而忽视空间观念和概念的教学. 由于坐标法的引进，几何问题代数化了. 从方法论上来说，代数上的一般方法和原理完全包括了 2 维、3 维空间的解析几何作为特例. 因此，在数学教学体系和课程改革中，一种普遍的倾向是取消解析几何课的独立设置，把它并入高等代数作为一般理论的应用. 问题不在于课程如何设置，而在于教学目标是什么. 在" 矛盾论" 中，毛主席强调指出一般性寓于特殊性之中. 在 2 维、3 维空间的解析几何中，向量有具体的形象，向量的代数运算有具体的几何解释，而且向量的向量积有定义，这些内容对于培养学生的空间想象能力和直觉能力起很大的作用，为代数学中向量空间的一般理论提供了鲜活的、能够"触及"的例证. 因此，我认为在教学中应该强调 2 维、3 维空间

解析几何的教学，特别是加强其中的向量代数的教学.

几何学是什么？在大学数学教学中应该加强什么样的几何学的教学？应该开设什么样的几何课程？应该灌输什么样的几何观念，以便提高大学生的数学素质？这是我们应该关心和讨论的问题.

2．在大学数学教学中几何课程应该追求的目标

数学在发展，时代在进步，因此大学数学课程的设置、内容都会有变化. 但是，无论如何，几何类的课程仍然应该在全部数学课程中占有重要的一席.

（1）培养学生的空间想象能力和直觉能力是几何课程的教学目标之一.

庞加莱把数学家按照从事数学研究的精神原则分为两类，一类是逻辑主义者，一类是直觉主义者. 当然，在数学家身上，这两种精神是交融在一起的；但是，每个数学家都有自己的癖好. 庞加莱在举了一些例子之后说:“直觉不能给我们以严格性，甚或不能给我们以可靠性. ”但是，他又指出:“纯逻辑永远不能使我们得到任何东西；它不能创造任何新东西；任何科学也不能仅从它产生出来”.“逻辑和直觉各有其必要的作用，二者缺一不可. 惟有逻辑能给我们以可靠性，它是证明的工具；而直觉是发明的工具. ”

自然，培养直觉能力不是几何课程的专利. 但是，直觉能力和空间想象能力有密切的关系，因此几何课程为直觉能力的培养提供了很好的环境. 几何学提供了把握和理解数学空间的手段，注重于从总体上把握数学对象的概念、结构和相互关系. 而代数学和分析学则更多的是提供解决问题的方法. 对于学生来说，往往会觉得掌握解决问题的方法更重要、更有效、更有成就感. 然而，学会在总体上把握数学的概念和结构，更加能够洞察数学的内涵、提高数学的观点，才能提高数学的创新能力. 一个明显的例子是在函数论研究中引进 L^2-空间等等概念，使得函数论研究成为泛函分析，从而达到一个全新的境界.

（2）几何学在本质上是关于空间的结构和性质的理论.

非欧几何学的出现不是几何学的终结，而是几何学成熟的开始. 欧氏空间曾经被认为是唯一的物理空间. 非欧几何学的出现是空间概念的一个大突破. 人们认识到关于空间的一些先验假定，不是空间本身所固有的绝对真理，而是人类对客观世界认识的经验总结. 空间是一个集合，其中的元素被称为点. 要使空间反映一定的客观世界，需要在空间中加进一定的公理系统，或一定的代数结构，或一定的变换群的作用，或一定的拓扑结构，或一定的局部坐标结构，或一定的度量结构，等等. 各种不同的空间都有不同的背景，都有广泛的应用. 在非欧几何学之后，根据克莱茵按照所论的变换群的不同对于几何学进行分类的观点，几何空间除了欧氏空间以外还有射影空间、仿射空间等等. 更重要的是，在 19 世纪下半叶以后，直到 20 世纪上半叶，先后出现了拓扑空间、流形、微分流形、黎曼流形、微分纤维丛等等重要的空间. 各种空间是各种数学演出的舞台，因此要从事各种数学的学习和研究，必须要对该数学的背景、舞台、语言和环境有所了解. 另外，空间中的各种概念也提供了观察各种数学对

象的语言. 由此可见，不只是从事几何学研究的人要学几何，而且做其他工作的人也要学一点几何.

（3）欧氏空间仍然是最重要的空间模型.

欧氏空间仍然是我们日常所处的物理空间最好的近似. 无论是欧氏平面几何、立体几何，还是欧氏空间中的解析几何和微分几何，都是在日常生活、生产、科研中处理有关“形”的问题的最重要的、不可缺少的知识. 而且，高维空间、弯曲空间都是以 2、3 维欧氏空间为模型，后者为前者提供直觉的依据. 在非欧几何学出现之后，不能抛弃欧氏空间，而是要更密切地注视欧氏空间，需要从它的特殊性中领悟它所藏身的一般性.

再有，从长期的教学实践来看，欧氏平面几何仍然是培养学生逻辑推理能力和抽象思维能力的最有活力、最有趣味的环境. 如果不是一味地追求难度、不去钻牛角尖，则这门课将会激发起学生对于学习数学的浓厚兴趣.

（4）加强坐标变换的观念和意识.

笛卡尔和费马的坐标方法提供了一种用解析方法研究几何图形的途径，但是坐标系的选取不是唯一的，因而需要研究几何图形在坐标变换下保持不变的性质，它们才是几何图形本身的性质. 再有，坐标本身不需要有笛卡尔和费马当初在建立坐标系时所赋予的几何含义 (距离、夹角等等)，它们只是借以建立点和数组的对应关系的工具. 现在更常见、更常用的空间是拥有局部坐标系的空间，于是坐标变换的观念处于更加重要、更加突出的位置. 坐标变换是几何学特有的观念，为了用最简单的方程表达几何图形，需要选择最能表达该几何图形特性的坐标系. 在代数学中也有变量替换，当然这是简化代数问题的需要，更重要的是它的几何背景的需要.

（5）加强几何变换和变换群理论的教学.

空间的变换的概念在射影几何学中体现得最显著. 射影几何学应该说起源于绘画和建筑学中的透视学，是人类在观察客观世界时把 3 维的物体用平面图形表示的经验和规律的总结. 这里面蕴涵着图形的变换理论. 后来，欧拉首先注意到仿射变换的意义. 克莱茵在 1872 年提出了著名的“爱尔兰根纲领”. 他认为每一种几何都由一种变换群所刻画，每一种几何学要做的在实际上就是寻求图形在该变换群的作用下保持不变的性质，一个几何的子几何是在原变换群的子群作用下的不变量. 例如：

$$\left\{\begin{array}{c}\text{射影几何学}\\(\text{射影变换群})\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\text{仿射几何学}\\(\text{仿射变换群})\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\text{欧氏几何学}\\(\text{刚体运动群})\end{array}\right\}$$

在这里，箭头所指的是前者的子几何. 虽然并不是所有的几何学都能够纳入克莱茵的分类方案之中，例如现代的代数几何学和微分几何学，但是克莱茵的观点给大部分几何学提供了一个系统的分类方法，而且提示了许多可供研究的问题. 尤其是在当代，李群的理论已经广泛地用于几何学和物理学的研究. 在许多几何空间的结构都容许一定的变换群的作用，它们的变换理论

是重要的研究课题，这些问题的提出与克莱茵的思想有关.

群与它的子群的结构和分类是代数学中的问题，而几何学中的变换群为抽象的群论提供了重要的例证，并且为群论的抽象研究提出不少课题. 另外，几何变换理论与日常生活、生产、科研都有密切的关系. 因此，在学几何的时候，必须把几何变换理论作为重要的内容之一.

3．关于大学数学教学中几何内容的建议

关于解析几何学和微分几何学，在大学非数学专业的现行数学课程的设置中已经有所体现，特别是在以萧树铁先生为主编的“面向 21 世纪课程教材-大学数学”五卷本中的第 2 本和第 3 本中作了生动的叙述. 如果在教学实践中，注意强调几何观念、强调培养学生的空间想象能力和直觉能力，将会取得很好的效果.

但是，从当代数学取得的成就和发展前景，以及数学在各个学科中日益广泛和深入的运用来看，在大学数学教学中还需要增加一些几何内容. 我认为，那就是关于拓扑学、微分流形、黎曼几何的初步知识.

拓扑学是在 20 世纪初由庞加莱提出并发展起来的学科，早在欧拉解决的哥尼斯堡七桥问题中已经孕育着拓扑学. 从克莱茵的观点来看，拓扑学是同胚变换群的几何学；而所谓的同胚则是空间之间双向连续的一一对应. 由此可见，连续的概念处于中心位置. 在定义”连续”的时候，需要把微积分中的邻域、开集、极限等概念进行抽象. 因此，在学生学了拓扑学的初步知识之后，会在概念的层次上对于微积分的有关定义有更深刻的了解.

拓扑学一经出现，立刻受到数学界的重视，并且开展了紧张的研究. 陈省身先生在 40 年代在上海的数学研究所主持的课程就是拓扑学. 因为，拓扑空间为数学研究开辟了一个新的领地. 现在，拓扑学的基本概念已经成为数学的常识，它已经渗透到数学的各个分支，特别是它的术语已经广泛地用于许多别的学科.

黎曼在 1854 年的著名演讲“关于几何学的基本假设”中提出了流形的观念，并且提出了在流形上量度曲线长度的方式，给出了常曲率空间的弧长元素的表达式. 经过数学家在半个多世纪里的努力，流形和微分流形概念的表述逐渐得到完善，最后在 20 世纪 30 年代定型. 经过陈省身和许多几何学家的努力，微分几何学得到长足的发展，微分几何完全突破了曲线论、曲面论以及局部微分几何的局限，以全新的面貌、深刻的内容和在数学、物理中的广泛应用出现在 20 世纪的数学中.

在微分几何普及的过程中，陈省身在芝加哥大学的”微分流形”讲义（1953 年）是微分几何的经典，是以后出版的所有微分几何教材的母本，在培养好几代微分几何学家方面起着根本的作用. 在 1980 年，陈省身在北京大学开设微分几何课，随后由北京大学出版社出版了《微分几何讲义》. 该书在国内培养新一代数学家方面，起到积极的作用. 陈省身在该书的序中说：“要研究整个流形，流形论的基础便成为必要. 流形内的坐标是局部的，本身没有意义；流形研究的目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质（如切矢量、微分式等）. 这是与一般数学

不同的地方. 这些观念经过几十年的演变，渐成定型. 将来数学研究的对象. 必然是流形；传统的实数或复数空间只是局部的情形（虽然在许多情况下它会是最重要的情形）”.

我们在自己的教学实践中，深切地体会到“微分流形”课对于提高学生的数学素质极其重要. 通过这个课程，学生对于数学的理解达到一个新的水平，初步了解和掌握了当代数学的术语和概念. 事实上，正如姜伯驹院士所说：“微分流形是描述无数自然现象的一种空间形式，是 20 世纪数学有代表性的的基本概念. 就象欧氏空间与古典分析的关系一样，微分流形为当代非线性分析的蓬勃发展提供了舞台和语言，它本身就集几何、代数、分析于一体”(参看他为陈维桓编著的《微分流形初步》所作的序言).

从国外的情况来看，从 20 世纪 50 年代以后，在陈省身的微分几何课程的影响下在各个著名的大学相继开设以微分流形为主要内容的微分几何课 (参看《陈省身——20 世纪的几何大师》一书中 I.M.Singer 的文章“陈省身在芝加哥”). 从 20 世纪 60 年代开始，以微分流形为基础的各种微分几何教科书陆续出版，特别是 I.M.Singer 和 J.A.Thorpe 在 1967 年出版的《拓扑学河几何学基础讲义》(中译本，干丹岩译，上海科学技术出版社 1985 年出版) 是当时美国大学数学教学改革的产物. 在该书序言中说：“目前一个普通大学数学专业的学生会发现，数学被严重地分割化了. $\cdots$ 然而，诸如数学内部有某种统一性，各个领域相互交叠，以及一个领域中的方法在另一领域中有其应用这样一些会使人惊叹不已的发现，在大学学习阶段就领略不到. 必须等到他有幸读研究生课程时才懂得其间的联系. $\cdots$ 这份讲义至少在拓扑-几何方面试图破除这种分割化，它用代数和高等微积分中的知识来证明与几何学、拓扑学和群论都相关的某些相当深刻的结果. ”

在前苏联，大学几何教学也经历了一个深刻的变革，它的成果体现在出版了一系列微分几何教科书，其中最著名的是莫斯科大学力学数学系的 B.A.Dubrovin，A.T.Fomenko 和 S.P.Novikov 撰写的三卷本《Modern Geometry——Methods and Applications》(Graduate Textbook of Mathematics, Springer-Verlag). 在该书的序言中说：“直到最近 (指 20 世纪 70 年代)，黎曼几何与基础拓扑学尚未包括在甚至是数学系的大学数学教育的必修课内，而经典的曲线、曲面的微分几何的标准课程逐渐被看成是不适合时代的需要. 但是至今仍然没有一致意见关于这样的课程怎样才能现代化，即近代几何的哪些部分应该被看成是对于现代数学教育是绝对重要的，叙述它们到什么样的抽象水平可能是适当的. $\cdots$ 设计这样一个课程的任务是从 1971 年在莫斯科大学力学数学系开始的 $\cdots$”.

在 20 世纪 60 年代初，吴光磊在北京大学给几何、拓扑专门方向的学生开设过两次微分流形的课程. 从 20 世纪 80 年代，在陈省身在北京大学开设微分几何课之后，我们陆续对各个方向的数学研究生开设微分流形课，有很多本科生选修此课程. 从 20 世纪 90 年代开始，在北京大学，“微分流形”正式成为本科生课程，供数学系本科高年级学生和研究生选修，产生了很好的效果.

基于现代数学已经广泛地渗透到包括物理、力学、工程、经济学等等许多学科的情况，我

认为在非数学专业的数学课程中介绍一些拓扑学和微分流形的初步知识，作为重要的选修课程，是十分必要的，也是可能的. 另外，黎曼几何和欧氏空间相比较，是数学从平直空间向弯曲空间的发展. 因此，了解黎曼空间的初步知识也是必要的.

目前，这些想法还需要经过实践的检验. 我们将在清华大学开设以"近代几何学"为名的实验课程，以便积累经验. 在这个课上，以拓扑学、微分流形、黎曼度量为基本内容，以具体的例子和直接的叙述把已经学过的高等代数和微积分知识融汇到几何学中来，使学生对于数学的认识在概念的层次上提高到一个新的水平，培养几何空间的意识，掌握现代数学的语言. 我期望，在非数学专业的数学课程中加强几何教学的想法能够得到各方面的支持，并获得成功.

(2001 年 8 月在南昌举行的全国高校"非数学专业《大学数学》教材讲习班"大会上的发言稿，刊登在《高等数学研究》，2002 年第四期和 2003 年第一期上. 《流形上的微积分》是其后续产品.)

《黎曼几何引论 (上册)》前言

自从 B. Riemann 在 1854 年给出 “关于几何学的基本假设” 的就职演讲以来, 黎曼几何已经成为数学中十分重要的基本理论. 黎曼几何的基础知识是从事现代数学研究的人必须掌握的内容. “黎曼几何引论” 课程是数学系研究生的必修课程之一.

经过我们在北京大学长期的教学实践, 和持续不断的教学体系及教学内容的改革, 在 10 年前把 “流形论” 部分从 “黎曼几何引论” 课中分离出来, 单独成为一门 “微分流形” 课, 并且已经出版了教材《微分流形初步》(陈维桓编著, 高等教育出版社, 1998 年第一版, 2001 年第二版). 该课程作为黎曼几何的预备课程, 既适用于硕士研究生一年级, 也可供数学系本科高年级学生选修. 我们相信, 该课程的开设对于加强大学的几何教学和提高大学生的数学知识水平会起相当大的作用. 现在的 “黎曼几何引论” 以 “微分流形” 课为先修课程, 其教学重点是联络、黎曼度量、测地线、曲率等黎曼几何的基本概念和基础理论, 并且比较系统地介绍大范围黎曼几何、特别是变分方法在黎曼几何中的应用. 本书在实质上是我在北京大学多年讲授 “黎曼几何引论” 课的讲稿, 其取材受到参考文献 [5; 21] 的重大影响. 其中第八、九、十章的内容我也在北京大学的研究生选修课或讨论班上, 以及在南开数学研究所举办的“几何拓扑学术年”(1986) 和“微分几何学术年”(1995) 的讲座中分别讲过多次.

一本适用的教材首先要取材适当. 一方面, 它必须反映当代数学发展的水平, 满足数学发展的需要. 黎曼几何发展到现在, 已经成为相当成熟的学科, 黎曼流形已经成为许多数学分支演绎的舞台. 我们不仅需要在平直空间中研究数学, 而且需要在弯曲空间中发展数学. 在目前, 这个最适当的弯曲空间就是黎曼流形. 所以, 不仅是专门从事几何研究的学生要学习黎曼几何, 而且数学系的从事各个方向研究和学习的学生都应该学习这门课. 因此, 课程设计和教学内容必须要兼顾到各方面的需求. 在另一方面, 教材又不能写成 “百科全书”, 把黎曼几何各个方面的成果都收集进来. 我们只能以黎曼几何中与当前数学发展水平相适应的基础知识和基本理论为重点, 务必使学生通过本教材的学习, 理解和掌握黎曼几何的基本思想和基本方法.

教材的语言要通畅而平易近人; 讲理要透彻并富于启发性和直观性; 所用术语和记号要准确、明快和简洁. 有的数学著作以言简意赅为其写作风格. 但是, 我们认为教材更应该写得易于理解, 能够吸引读者, 使读者感到亲切, 而不要板着脸把读者拒之门外.

我感到很高兴的是李兴校教授愿意参加到编写《黎曼几何引论》这项工作中来. 他的参加使得本书的写作进程加快了, 并且全书的编著质量也得到了提高. 特别是全书的习题、答案及提示是由他负责编写的. 本书是我们两个人愉快合作的结晶.

普遍认为, 编写教材是费力不讨好的任务; 尤其是不少年轻一些的同志觉得编写教材无非是抄抄写写, 是剪刀加浆糊的产物, 是脑力劳动中的低层次工作. 实际上, 一本好的教材是研究工作的长期积累和教学实践的经验总结, 也是重要的创新成果. 作者不仅要了解该学科的全貌, 能够博采众长, 而且要成为教学实践、教学改革的有心人, 能够持续不断地投入全部精力和

甘于默默无闻的长期不懈的努力, 总结自己在教学中的心得体会. 如《南开大学数学教学丛书》(科学出版社出版) 的序中所说: 这些教材不是编出来的, 而是在长期教学中 "教" 出来的, "改" 出来的. 我十分赞同关于教材建设的这个观点. 形成一个先进的教材体系, 是创新人才培养工作中的 "百年大计", 从上到下都应该重视这件事. 基于这些认识, 我们自己在几何类课程的教材建设方面已经作出了长期、艰苦、系统的努力. 值得欣慰的是, 这些努力没有白费: 献给读者的一系列几何教科书在培养数学人才和普及微分几何知识方面应该说起到了显著的作用.

本书可以用于高等院校数学系研究生的不同层次的几何课程. 标准的研究生课程 "黎曼几何引论" 可以在先修课 "微分流形" 的基础上, 以本书第二章至第七章为主要内容, 在一学期内讲完（周学时为 3）. "黎曼几何引论" 课的另一种设计可以从微分流形的概念讲起, 以本书第一章至第四章的内容为主, 结合《微分流形初步》, 也可以在一学期内完成（周学时为 3, 或 4）. 后一种课的设计也许会有更广泛的适应性, 而第五章至第七章可以作为同学自学的材料. 第八、九、十章分别讲述 Kähler 流形、黎曼对称空间和主纤维丛上的联络的基础知识, 它们是黎曼几何的有机组成部分, 对于学习、了解和应用黎曼几何基本理论是不可或缺的. 这些内容可以作为微分几何、拓扑学、几何分析、函数论、数学物理等研究方向的研究生进一步自学的材料, 也可以作为 "黎曼几何 II" 的教材. 为了方便读者使用, 本书按照上面的设想分成上、下两册出版. 在这里, 我们需要特别提一下, 第九章 "黎曼对称空间" 的取材和写作参照了南开数学研究所孟道骥教授的讲稿. 在 1988 年, 我们曾经邀请孟道骥教授到北京大学数学系给研究生系统地讲授"黎曼对称空间"; 后来, 我在北京大学的几何讨论班上也多次讲过此内容. 在我们编写第九章时, 孟道骥教授把他当年的讲稿慷慨地借给我们参考; 并且在第九章完稿之后, 他又认真地审读过一遍. 作者在此特向他表示崇高的敬意和衷心的感谢. 虽然黎曼对称空间在本质上是李群、李代数的理论, 但是它是特殊的黎曼空间, 是检验几何理论的重要场所, 所以本书的重点是强调它的基本理论和几何性质. 读者在熟悉（或承认）李代数的一些基本事实之后, 阅读本章似乎没有特别的困难. 由于篇幅的限制, 也为了不喧宾夺主, 关于李代数我们只提及所要用到的一些基本概念和事实, 没有给出它们的详细的证明. 但是, 这样处理的结果反而使得黎曼对称空间的性质和结构能够更加清晰、更加突出地展现在读者面前, 达到更好的效果.

在本书的写作过程中, 第一作者得到北京大学数学科学学院、北京大学研究生院、北京大学教材建设委员会、北京大学出版社以及国家自然科学基金 (项目号: 19871001, 10226037) 的支持和资助. 在这期间, 第二作者得到国家自然科学基金 (项目号:19971060) 和河南省自然科学基金的资助. 作者在此向他们表示衷心的感谢. 在本书交付北京大学出版社正式出版之前, 孟道骥教授和马辉博士受本丛书编辑委员会的委托, 认真、细致地审读过全书初稿, 并且提出过许多宝贵的意见和建议. 作者在此向他 (她) 们表示深切的谢意. 最后, 作者对责任编辑邱淑清老师卓有成效的辛勤工作表示敬意. 限于作者的水平, 本书中的不足之处肯定是存在的, 诚恳地希望读者能不吝指正.

(陈维桓, 李兴校:《黎曼几何引论 (上册)》, 北京大学出版社, 2002 年 12 月出版)

《流形上的微积分》前言

本书是《大学数学》中的微积分的组成部分.

通过前面各部分的学习, 我们对于一元微积分和多元微积分的基本概念已经有了相当深刻的理解, 并且掌握了微分、积分的计算技巧及其应用. 但是, 随着数学本身的发展, 以及解决实际问题 (特别是物理和力学中的各种问题) 的需要, 仅仅考虑欧氏空间中的微积分是不够的. 例如, 只知道定义在欧氏空间的开区域中的函数的连续性和可微性, 则尚不能对于定义在球面上的函数的连续性和可微性有正确的、深刻的了解. 所以, 有必要把数学—微积分的"演出舞台"从欧氏空间进一步拓展到微分流形. 这就是本书的主要目标.

流形的概念是由伟大的数学家黎曼 (B.Riemann) 在 1854 年的著名演讲《关于几何学的基本假设》中提出来的. 在笛卡儿和费马发明坐标系之后, 我们所处的空间中的点与 3 个有次序的实数的组 (x, y, z) 能够建立 1-1 对应关系. 这是数学中的革命性创举, 是牛顿和莱不尼茨发明微积分的前奏曲. 黎曼关注数学物理问题, 特别是热方程. 他把物理中的数据看成是抽象空间中的点, 该数据成为"点"的坐标. 此时, 坐标不再具有几何含义. 黎曼引进的实际上是我们现在所称的局部坐标系. 在 20 世纪初 Poincare 提出拓扑学之后, 拓扑概念很快成为数学的基础概念. 流形和微分流形的概念在此基础上逐渐成熟, 大范围分析 (即大范围的微积分学) 和大范围微分几何学应运而生, 成为 20 世纪的热门研究课题. 与此同时, 微分流形的有关概念成为现代数学的基本术语, 出现在众多的数学文献中. 了解和掌握微分流形的基本概念和术语是进入现代数学殿堂的前提.

本课程的标题是《流形上的微积分》. 微分学在本质上是局部理论, 它的基本概念和技巧在前面已经学过了. 因此, 本书的重点在于扩展我们对于空间本身的了解, 也就是介绍拓扑空间和微分流形的概念, 介绍定义在拓扑空间和微分流形上的连续函数、光滑函数和光滑映射, 以及随之而产生的处理局部定义的量和大范围定义的量之间关系的原理和方法. 所以, 本课程的副标题可以是《微积分的几何理论》.

20 世纪的几何大师、中国现代数学的建筑大师陈省身曾经说过: "要研究整个流形, 流形论的基础便成为必要. 流形内的坐标是局部的, 本身没有意义; 流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质 (如切向量, 微分式等). 这是与一般数学不同的地方. 这些观念经过几十年的演变, 渐成定型. 将来数学研究的对象必然是流形; 传统的实数或复数空间只是局部的情形 (虽然在许多情形下它会是最重要的情形)"这一段话为我们指明了本课程的主要目标.

在萧树铁先生的主持和指导下, 以清华大学数学科学系的老师为主体编写的《大学数学》是非数学专业数学课程教育改革的重要成果. 在萧树铁先生亲自创导下, 我们在 2001 年和 2002 年的秋季两次为清华大学理科基地班 2 年级同学在学习多元微积分之后开设新课程《流

形上的微积分》, 本书是在该课程取得经验的基础上编写的. 全书由四章组成, 标题分别为: 拓扑结构, 光滑结构, 外微分式及其积分, 黎曼流形上的微分算子.

在"拓扑结构"这一章, 我们首先说明只有定义在欧氏空间上的函数的连续性概念是不够的, 经常需要考虑定义在 3 维欧氏空间中的曲面上的函数的连续性. 关于后者, 传统的定义显得乏力, 需要摒弃球状邻域的概念, 代之以一般的邻域概念. 拓扑结构是从欧氏空间的邻域结构抽象出来的. 但是, 我们感兴趣的不是抽象集合上的各种各样怪异的拓扑结构, 而是与欧氏空间相近的拓扑空间, 所以我们在介绍了拓扑的一般概念之后, 重点是介绍重要的拓扑空间的例子和重要的拓扑性质.

在"光滑结构"一章, 首先说明微分结构对于引进函数的可微性概念是必要的. 然后, 主要介绍光滑流形的重要例子, 光滑函数的概念, 以及沟通局部定义的数学对象和整体定义的数学对象的工具—截断函数和单位分解定理. 切向量和光滑切向量场是微分算子, 是流形的光滑结构的衍生物, 本章对此作了系统的讨论.

"外微分式及其积分"是本书在微积分学方面的主要部分. 在前面两章扩展了我们所考虑的空间概念之后, 在本章需要进一步展开和研究该空间上的微积分学. 主要内容有: 外微分式, 外微分运算, 外微分式的积分, Stokes 定理.

"黎曼流形上的微分算子"的主要内容首先是以欧氏空间为例子, 介绍光滑切向量场的协变导数和协变微分, 然后介绍梯度, 散度, Laplace 算子等重要的微分算子, 以及场论公式, 最后把这些算子过渡到一般的黎曼流形上去.

本书可以按周学时 4 的计划在一学期内讲完, 其中带 * 的章节用小号字排出，在课堂上可以不讲, 仅供学生自学和参考. 若周学时为 3, 则前三章可以作为课程的内容，而第四章作为学生自学的材料.

教学课程体系和教学内容的改革是一个不断地适应时代发展的需要、不断地反映学科创新成果的艰难过程, 不是一朝一夕就能完成的. 对于目前的这门新课程来说, 从取材、内容到先后安排和讲法更有一个逐步成熟的过程, 恳请大家不吝指教.

在本书写作过程中作者得到国家自然科学基金项目 (批准号为:10271004) 的资助，在此作者对国家自然科学基金委员会的支持表示衷心的感谢.

(陈维桓:《流形上的微积分》，2003 年，由高等教育出版社出版)

跟随吴光磊先生学习 30 年

在纪念吴光磊教授诞辰 80 周年的时候，我打开封存已久的听吴先生讲课时所记的笔记和讨论班记录，重读吴先生在“文化大革命”后期给我写的几封信，吴先生讲课的情景浮现在眼前，他对我许多次谈话似乎又在耳边响起. 回想起来，自从我跟吴先生学习微分几何，历经磨难又回到他身边工作，直到他在 1991 年逝世，前后历时几乎 30 年. 在这 30 年中，我向他学习知识，学习教书和做学问的态度，得到他的无数教诲和帮助. 我是吴先生培养起来的. 我想，回忆吴先生给我的教育，大概能够从一个重要的侧面反映吴先生的渊博知识和为人品格，对于后人了解和学习吴先生有帮助，也是对吴先生的最好的纪念.

我是在 1958 年进入北京大学数学力学系学习的. 北大的数学名教授很多，像段学复、江泽涵、闵嗣鹤先生等等，我在中学时已经久闻他们的大名. 进入北大之后，在他们身边学习感到非常幸运，在听取他们的讲话和授课之后更加钦佩他们的学识和修养. 当时，虽然在 1956 年提出过“向科学进军”的口号，但是反右等等政治运动已经把我们这些年轻的学生变得谨小慎微了，成名成家的思想至少不能挂在嘴边，也不能流露在行动上，不能去想象将来自己能够成为一个什么家，只是下意识地认为要好好学习，将来报效祖国和人民. 当时我对系里的学科组成和发展的情况，以及各位老师的情况一无所知，也不去打听，所以也不知道吴光磊先生的名字. 记得在三年级分专业的时候，只知道要理论联系实际，要选择面向实际的新兴学科方向，能够供我们选择的也只有那些有实际应用背景的学科，或新兴学科. 就这样，我稀里糊涂地选择了当时放在计算数学专业里的控制论方向. 当然，北大的老师是有水平的，是敬业的，即使是新的学科方向也已经做了很多探索和比较严密的规划. 因此，在往后的两年中，我们仍然受到良好的教育. 比如，徐献瑜先生给我们上程序设计，毛德行老师给我们上计算机 (北大的红旗计算机) 的机器原理，还有龚光鲁、谢衷洁老师教我们概率统计，等等. 当时，一方面，国家正经历三年自然灾害，生活变得十分困难；在另一方面，所谓的自动机离我们还相当的遥远，所谓的程序设计自动化在我们闭塞的国家还停留在概念阶段，学习的方向处于极度混沌的状态. 我记得我经常在图书馆里研读关于自动机原理的书，结果是一头雾水，弄不清楚自己应该怎样努力. 这种情况直到 1962 年才有所改变.

在 1961~1962 年间党中央调整了关于知识分子的政策，1962 年夏天又召开了关于基础研究的会议，于是在北京大学数学力学系，过去被认为是脱离实际的学科方向，例如数论、代数、函数论、拓扑和几何等研究方向，开始重新培养学生. 在这种情况下，我们年级的控制论方向停办，一部分同学继续留在计算数学专业，多数同学被分到数论、代数、复变函数和微分几何这四个方向学习. 由于我在中学就喜爱几何学，这次就毫不犹豫地选择了几何方向，结果走上了艰难多变的学习微分几何的道路. 这就是说，我在大学四年级末的时候 (56 级、57 级、58 级

是在北京大学历史上仅有的按 6 年制教学计划培养的年级)、在对于微分几何十分无知的情况下开始学习微分几何的.

在 1962 年，田畴老师给我们上微分几何课，课讲得很精彩，特别是关于曲面论的基本方程和基本定理，田老师强调找出决定曲面在空间中的形状的完全不变量系统，给我留下深刻的印象. 当时的主要教学参考书是吴大任先生的《微分几何》与拉舍夫斯基的《微分几何教程》. 这些书写得不错，但是比较烦琐，特别是拉舍夫斯基的书篇幅很大，有时候语义不很清楚，读起来不得要领. 田老师的课简明扼要，重点突出，通过这个课我很快获得了关于欧氏空间中曲线、曲面论和内蕴微分几何的完整概念. 后来才知道，在此之前，吴光磊先生讲授微分几何，而田畴老师是该课程的助教. 田畴老师给我们讲的课采用的正是吴光磊先生教课的提纲和内容.

从 1962 年秋季起，我们开始专门化方向的学习，除了"近世代数"课 (丁石孙和聂灵沼两位先生，两学期) 和"拓扑学"(李同孚老师) 外，吴光磊先生先后给我们讲授了"黎曼几何和外微分式"、"活动标架法"和"联络论"，章学诚先生给我们开设了"仿射联络"课. 在"黎曼几何和外微分式"课上是我们第一次见到吴光磊先生. 除了我们 58 级同学 (董玺印、张宜金、马希华和我) 外，还有 57 级的部分同学参加此课.

吴光磊的课是深思熟虑的. 在上课时吴先生往往拿出一张小纸片，上面有事先写好的讲课要点. 他的板书不多，在黑板上写了几个数学符号之后，往往把要点讲得非常透彻，一针见血，并且从各个方面进行分析和解释. 我对于吴先生讲的内容和所用的符号感到很新鲜，这种新鲜感促使我在课上拼命地记笔记，生怕遗漏一些什么，当然在这种情况下，还谈不上欣赏吴先生的课.

吴先生的课的选材是独到的，原则是观点高、言简意赅、重点突出. 当时，微分几何和黎曼几何的教科书很少，能找到的只有 Eisenhart 的《Riemannian Geometry》和 E.Cartan 的《La Geometrie des Espaces de Riemann》，后者是法文的，并且普遍认为 Cartan 的书难读，因此只能用 Eisenhart 的书. 但是吴先生指定的是 K.Yano 和 S.Bochner 合著的《Curvature and Betti Numbers》第一章，总共只有 25 页，讲了一个学期. 在"黎曼几何和外微分式"课上吴先生从 n 维向量空间讲起，介绍对偶空间的概念，以及欧氏向量空间，n 维仿射空间和 n 维欧氏空间的概念. 在这里，吴先生强调向量空间及其对偶空间的元素在坐标变换时的不同的变换规律，强调向量空间和仿射空间的差异. 然后，讲解张量的概念和张量的运算. 第三章专门讲欧氏空间中在曲纹坐标下向量场的导数和微分，接着过渡到黎曼空间中的张量分析，曲率张量和截面曲率. 这样的过渡是十分自然的，学生很容易接受. 更要紧的是在讲完协变导数的概念之后，重新回到曲面论，把 Gauss-Codazzi 方程用协变导数的记号表达出来，给大家留下深刻的印象. 最后两章是讲外形式和外微分式，采取的是非常直接的、具体的讲法，没有很多抽象的概念上的框架. 如果把吴先生的讲法和 Cartan 书中的讲法作比较，显然吴先生的讲法好懂多了，我在读 Cartan 关于外微分法的书的时候产生的许多疑问在吴先生的课上得到了解决.

我在"活动标架法"课上的笔记已经找不到了，但是印象非常深刻的是关于活动标架的相对

分量. 吴先生把 3 维欧氏空间中的标架构成的集合等同于 $\mathbb{R}^3 \times GL(3)$，那么活动标架的相对分量是一个标架的邻近标架与原标架的差异 (包括标架原点的差和各个标架向量的差) 在原标架下的表示，它们是 $\mathbb{R}^3 \times GL(3)$ 上的一次微分式. 看到这些相对分量的那么简单的具体表达式，把关于外微分式的神秘感一扫而空了. 后来，我在自己的教学中努力地推广"活动标架和外微分法"教学的动力就来自这门课.

吴先生的"联络论"课的主要内容有微分结构，光滑函数，切向量，切空间，光滑切向量场，子流形及其在高维欧氏空间中的隐蔽，单位分解定理，外微分式及其积分和 Stokes 定理. 这是典型的流形论. 此外，吴先生还讲了李群基础，包括拓扑群，李群，局部李群，左不变微分式和结构方程，局部李氏变换群，李群的李代数等等. 第三章是仿射联络，挠率和曲率，标准法坐标系，李群上的仿射联络等. 大概是由于课时的关系，关于李群上的联络似乎没有把吴先生要想讲的东西完全讲出来. 无论如何，这次是吴光磊先生历时最长、计划最完备、目标最明确地开设的微分几何专门化方向的系统课程，该课程达到了当时国内和国际上的高水平.

后来，我与吴先生接触多了，逐渐了解到吴先生自己学习微分几何的过程. 在 1939~1943 年，吴光磊先生在昆明西南联大读书. 在此期间受到过陈省身先生的指导和教育. 吴先生说过在西南联大期间曾经向陈先生请教过活动标架的问题. 但是，当时吴先生毕竟是本科生，而且为解决生计问题还要到中学去兼课. 此外，吴先生的另一个兴趣点在数理逻辑 (在西南联大毕业后吴先生曾经担任数理逻辑课的助教)，因此吴先生在西南联大尚未开始微分几何的研究. 况且，陈省身先生关于 Gauss-Bonnet 定理和示性类的工作是在 1943~1945 年在美国 Princeton 的高等研究院完成的. 然而，吴光磊先生在 1956~1965 年间所做的研究工作是陈省身先生的上述工作的继续，他是在国内仅有的一位直接跟随陈省身先生的上述工作做大范围微分几何研究、并有成就的几何学家，但是他是在国内、并且是在解放以后政治运动接续不断的环境下达到这样的成就的，因此是特别不容易的. 吴先生和我多次说过，他学微分几何是自己一点一点地从书和杂志文章中啃下来的. 在他逝世以后，我整理他的藏书，发现他在很多书上都留下了笔记；他拥有陈省身在芝加哥大学的著名的油印讲义《Differentiable Manifolds》，以及陈省身先生的几乎全部的论文抽印本 (后来，我问过陈省身先生，这些都是陈省身先生寄给他的). 我们知道，陈省身的讲义《Differentiable Manifolds》培养了好几代微分几何学家，是 20 世纪 60 年代以后出版的许多微分几何教科书的蓝本. 从吴先生的课的内容来看，他接受并发挥了陈省身先生在该讲义中表达的几何思想. 现在，吴先生所拥有的这份讲义已经收藏在北京大学数学学院图书馆.

吴先生十分推崇陈省身先生. 不仅他自己的研究直接追随陈省身关于 Gauss-Bonnet 定理和示性类的工作，而且在指导学生的时候也围绕陈省身的工作. 我们 58 级的同学做毕业论文时，吴先生负责指导我和董玺印，章先生和田老师负责指导另外两位同学. 吴先生给我的题目是积分几何，指定的参考文献是陈省身的"On Integral Geometry in Klein Spaces"以及陈省身和王宪钟的"Differential Geometry in Symplectic Space I". 最后我的本科毕业论文题目是"辛

空间上的积分几何”，将陈先生关于齐性空间中的积分几何的思想具体地用于研究辛空间中存在不变密度的几何对象，并且得到相应的积分几何公式.

1964 年秋季，我开始做吴光磊先生的研究生. 当时除了吴先生和田老师的讨论班以外，我主要是读 Nomizu 的《Lie Groups and Differential Geometry》，见到 Kobayashi 和 Nomizu 的《Foundations of Differential Geometry》(Vol.I) 和 Goldberg,Sternberg 的书则是 1964～1965 年的事. 虽然我有一位高两个年级的同窗孟强，但是讨论很少. 在此期间，我也读了陈省身的论文“On a Theorem of Algebra and its Geometrical Applications”，并且将它用于子流形在常曲率空间中等距浸入的唯一性问题，写成一篇论文，得到吴先生的肯定. 但是，在研究生期间好景不长. 经过一年的辛苦研读 (在这一年中至少还有一个月以上的工厂劳动)，全体在读研究生去农村参加四清运动. 过了一年回到北京大学昌平校区，已经是“文化大革命”的前夕. 我记得在“文化大革命”之前最后一次见到吴先生就是在昌平，我向吴先生诉说的第一句话是:“在过去一年中，我把微分几何全部忘记了”. 后来知道，吴先生的重要工作“示性类的超渡”大概是在 1962～1964 年期间完成的.

“文化大革命”迫使我们停止研究生学习，在 1968 年夏天我被分配到天津教中学. 再见到吴光磊先生大概是 1971 年春节前后，那时田畴老师已经离开北大去合肥教中学，吴先生则从江西鲤鱼洲劳动回来，患有血吸虫病，健康状况已经不是很好. 我到他在中关村的平房宿舍去看望他，房子已经被隔去一间，显得拥挤多了，保姆早已辞退，两个女儿长大了. 记得有一次，我在他的家里，恰好有工宣队的人来拜年，问吴先生我是什么人，吴先生说是过去的学生. 在那种环境下，我们在家里谈的还是很多. 我汇报我在中学工作的情形，谈到对张铁生交白卷事件的义愤. 更多的是吴先生对我的鼓励. 我向吴先生借阅 Eisenhart 的《Riemannian Geometry》，开始重新学习微分几何. 后来我经常在寒暑假期间来拜访吴先生，每次都得到吴先生的鼓励和关心. 特别是，陈省身先生在 1972 年第一次访问新中国之后，中国的基础数学研究有重新开始的苗头，吴先生告诉我关于陈省身先生以后来华作系列演讲的消息，因此我能够在 1974 年和 1978 年在中国科学院数学研究所参加陈省身先生的学术活动，认识了很多数学界的前辈和一些年轻的同志.

吴光磊先生告诉我，在 1975 年将在中国科学院数学研究所举办讨论班. 这是重建中国现代数学的重要活动，是弥补文革造成的人才断层的一个努力，是复兴中国现代数学研究的开端. 吴光磊，吴文俊和张素诚三位先生是该讨论班的主讲人. 因此，吴光磊先生为文革以后的中国数学的复兴做出了重要贡献. 后来，年轻一点的几何、拓扑、分析方面的骨干研究队伍就是那次讨论班之后形成的. 陈省身先生曾经为讨论班推荐了 Hicks 的《Notes on Differential Geometry》一书作为主要参考书. 中国科学院数学研究所把该书做成油印讲义，吴先生帮我要了一套. 于是，这本书成为我在 1975 年以后的主要学习材料，拉近了我和现代微分几何的距离.

1976 年，吴光磊先生在十年前完成的重要论文“示性式的超渡”在数学学报上发表. 他给我

寄了一份抽印本. 按照吴先生自己的说法，这原先"是作为教材的详细提纲而写出的". 他告诉我，"前两节是关于联络论的提纲，你可以参考一下". 当然，文章写得比较简略，但是很深刻，我反复进行了认真的研读，并且做了详细的阅读笔记，获益匪浅. 此后，吴先生经历了疾病的折磨和考验，前后动了两次手术. 同时，中国的社会也经历了四人帮倒台和唐山大地震，百废待兴，我自己则面临尽快归队工作的问题. 在这件事上，吴先生在对付疾病折磨和社会动荡变化之际，为我花了不少心血，我是终身不忘的. 当然，由于四人帮造成的混乱局面非一时所能解决，而对于我们这些"老成少年"(年纪颇大，而学无成就者) 们而言却是"时不我待"，因此在段学复先生和吴光磊先生的鼓励和支持下，最后我重新经过研究生入学考试在 1978 年秋天重返北京大学，回到吴先生身边学习和工作.

重返北大之后，我面临的最大压力是尽可能快地完成毕业论文. 吴先生让我读陈先生和 Lashof 的文章，读陈先生关于 Gauss-Bonnet 定理的文章，读 Calugareanu 关于曲线的自勾数的论文和 H.Weyl 关于管体积的公式等等. 最后，我把 H.Weyl 关于管体积的计算用于田老师的子流形积分公式，建立了所谓的高阶平均曲率向量场的概念，并且得到关于子流形的不依赖特殊法向量场的积分公式. 这篇论文成为我的学位论文，并且以此参加 1980 年召开的第一次双微会议，发表在会议论文集上.

我至今还记得吴光磊先生在第一次听我汇报该论文的结果时所说的话. 他说，研究工作就是要这样去做，这样去发现问题. 这是吴先生对我的为数不多的当面的肯定之一. 当然，吴先生对于我所定义的高阶平均曲率向量场很重视. 后来，他经过深入的考虑，发现了它的变分性质，成为他和我的第一篇合作论文，也引发了别的作者的一些后续的研究.

1980 年底，我正式留在北大任教. 1980 年的北京，学术活动非常频繁. 在春天，陈省身先生来北大开设微分几何课，同时在中国科学院数学研究所讲外微分系统. Griffiths 等著名数学家和伍鸿熙等许多华裔数学家来北京讲学. 最后，秋天在北京召开第一次双微会议. 我的第一个主要任务是为陈省身先生在北大的讲课整理出正式出版的书. 这对于我来说是一个非常严峻的挑战，因为那时候我既没有教学经验，在研究工作方面还刚刚起步. 但是，有利条件是吴光磊先生给我们上过流形论的课，陈省身先生的许多著作和有关文献我还比较熟悉，更重要的是有吴光磊先生把关和随时可请教. 因此，我着手此项工作时并没有太胆怯. 实际的做法是，我先写出详细的提纲，请吴先生看，然后寄给陈省身先生修改，再按照提纲写出第一章，然后按照上面的同样程序进行，请陈先生看这样的写法是否符合要求. 在第一章通过之后，后面就比较好做了，然后一章一章地做下去，完成一章就给陈先生寄去，进行修改和定稿. 吴光磊先生伟该书的顺利完成做出很大贡献. 我记得，吴先生在看完"外微分式"一章之后说，外微分运算的局部性在外微分运算的存在性的证明中是本质的. 因此，我对于初稿进行了修改，强调了这一点. 再有，有一次，陈先生来信告诉我，联络的存在性证明似乎不正确. 我和吴先生又进行了认真的讨论，然后确认没有错误，我再写信给陈先生作了详细的解释. 就这样，在完成这项任务时，吴先生担任了参谋的角色. 陈省身先生在《微分几何讲义》的代序中说: "吴光磊教授

在讲义整理过程中提供了许多宝贵的意见”. 这反映了该书写作过程中的实际情况.

在我写作《微分几何初步》时，吴光磊先生同样仔细地阅读了书稿，并且提出了一些很好的意见. 每当我完成一篇论文时，我也总是首先向吴先生汇报，听取他的意见. 我们经常讨论，商量学生培养工作，商量讨论班的计划和安排. 在改革开放之后的十年间，工作和生活是比较平稳的. 吴先生给了我很多帮助.

在这里，我想要谈一下我所了解的关于吴先生计划写《联络论》一书的情况. 吴先生计划写《联络论》早在 20 世纪 60 年代就开始规划了. 聂灵沼先生告诉我，在改革开放之后的一次关于《现代数学丛书》的规划会议上已经把《联络论》列入出版计划，并且把这个消息告诉过吴先生. 但是，吴光磊先生一直也没有能够拿出书稿来，成为数学教育界的一件憾事. 据我所知，吴先生是认真对待这项工作的. 首先，在 20 世纪 60 年代吴先生给我们开设微分几何专门方向的系列课程是他的计划实施的准备阶段，尽管我们当初并不知道此事. 1976 年，吴先生在给我寄来他的论文“示性式的超渡”的抽印本时，明确地说“前两节是关于联络论的提纲”. 20 世纪 80 年代在吴先生的家里，他曾经指给我看放在书橱里的他为此书准备的一摞读书笔记.

究竟是什么原因使该计划没有完成呢？我想首先当然是环境和时机的问题. 在他完成论文“示性式的超渡”之后，接着是“史无前例的文化大革命”, 失去了进行基础研究的最基本条件，研究队伍也打散了. 在我们热火朝天地搞“文化革命”的时候，大范围微分几何研究在国际上正进行得如火如荼，大批成果和微分几何方面的著作在 1960～1970 年代涌现. 在这种情况下，吴先生可能对原计划要写的书的价值和必要性有所考虑. 1976 年以后，吴先生又患上了癌症，健康情况不好. 因此，要吴先生独自完成此项工作是有点苛求了. 但是，当时能够用得上的人大概只有田老师，章先生，李安民和我. 李安民在努力攀登科学高峰之中，吴先生为李安民取得的成就感到高兴. 写书应该是年纪大一些的人的事，而我们这些“老成少年”们还要为解决自己的职称等等问题进行挣扎和苦苦奋斗. 在我和吴先生的多次谈话中，感觉到他有一种“不要耽误你们”的想法. 确实是这样，写书需要投入大量的时间和精力的. 我在整理陈省身先生的讲义的时候，花了差不多两年时间，结果是没有能够参加在上海-合肥举行的第二次双微会议，系里也没有为我写书安排必要的工作量，书的出版也从来没有作过我提职的因素. 在另一方面，从 1984 年秋季以后，我在实际上支撑着系里微分几何方面课程的教学，在接着的五、六年间平均每学年要主讲三门课，在 1985～1986 年南开数学所还有集合拓扑年学术活动，任务是相当繁重的，要我执笔来完成这项任务确实有困难，吴先生也从来没有表露过这种意向.

即使是这样，我还是多次和吴先生谈起他的写作计划，每年我都要和吴先生商定，根据他的身体情况，在春天的 4～6 月由他在讨论班上围绕他的书的内容每周讲两小时，参加者有吴传喜 (博士生)、我和吴先生的一些硕士生. 于是，吴先生先后讲过的内容有：纤维丛上的联络，欧氏空间中的一般子流形，法坐标系，de Rham 上同调，Cech 上同调，关于 Laplace 算子，复流形等等. 我们大家都没有料到的是，在 1990 年吴光磊先生的身体情况突然恶化，看上去已经痊愈的癌症复发. 其实，我们太幼稚了，对吴先生的身体状况考虑得不够. 如果我们能够想

得多一点，只要有人出面组织及个人，在某段时间集中在一起，有一个相对来说比较宽松从容的环境，在吴先生的指导下，报告吴先生的笔记和有关文献，那么吴先生的写书计划是能够完成的，他关于微分几何的想法和艰苦研读的心得就能够留给后人了. 最近，我在编写《黎曼几何引论》下册的时候，特别是在撰写"复流形"、"复向量空间的对偶空间"，以及"向量丛上的联络"时，常常想起吴先生在讨论班上讲的内容，把他的想法融合在里面，寄托了我对导师吴光磊教授的思念和纪念。

吴光磊先生一生淡泊名利，默默地辛勤工作，他自己发表论文不多，这与他所处的环境和机遇有关系，也与他坚持做学问的高标准有关系. 他经常讲需要考虑几何的基本问题，不要只是在木板上找一个最薄的地方钉一枚钉子. 他对我们的要求很严格，在我最初交给他的论文初稿中还留有他逐字逐句修改的笔迹，常常连一个标点符号也不放过. 在我和他谈学习心得时，他经常讲的一句话是"我听不懂"，意思是我们没有把要讲的概念用最简练、最形象的语言表达清楚. 他还经常告诫我们，在阅读别人的文章时，即使是读通了，至多是做了一次高级校对员，关键是要搞清楚作者的问题和思想，努力用自己的语言和所掌握的工具去处理，争取作推广、提高、改进和创新. 在纪念黎曼逝世 120 周年的时候，他在数学系举行的报告会上介绍了黎曼富有创造性的一生，他对黎曼的深邃的思想以及对于数学物理的关注和贡献表达了无限的崇敬和赞扬. 我猜想，在吴先生的内心深处是以黎曼为榜样的.

(原文刊载在《魂系数学，坚韧无悔》(吴光磊教授纪念文集)，2003 年 9 月由北京大学出版社出版)

一代数学宗师和他的数学大国之梦
(纪念陈省身先生逝世一周年)

数学上的领袖并非表现为官方权威的形式，而存在于他的同行的思想和数学的灵魂之中. 它是众多个体的尊敬和赞赏的一种合成.

在 1990 年暑假，美国数学会在 UCLA 主办历时一个月的暑期讲习班，以微分几何为主题，主持人是丘成桐和 R.E.Greene. 在讲习班的第一个周末，由丘成桐和郑绍远教授牵头组织了一个祝寿活动，庆祝陈省身先生 79 岁生日. 在庆祝会上，陈省身先生的许多朋友、同事和学生纷纷上台，讲述这位几何大师的待人处世的故事，作为数学家的智慧和对于年轻学者的鼓励、启发和指导. 各位专家在庆祝会上的发言十分精彩，都发自内心地表达了他们对于陈先生的崇敬和爱戴. 后来，这些讲话由丘成桐教授收集在一起，编辑成由香港 International Press 出版的《Chern——A Great Geometer of the Twentieth Century》一书. 该书的中文版在 2000 年，在陈省身先生 89 岁寿辰时由国立交通大学出版社（台湾新竹）正式出版，书名是《陈省身——20 世纪的几何大师》（以下简称为《几何大师》）.

该书以陈先生自己撰写的“我的学算生涯”和滕楚莲所写的“陈省身的生平和她的数学”为开卷篇. 这两篇文章全面、生动、准确地叙述了陈先生的生平、学术生涯和数学成就.

此书的特点是各位著名数学家朴实无华地、真切生动地记叙了他们自己在与陈先生交往过程中的感受，记叙了一些鲜为人知的事件. 这些文章从各个方面烘托出陈先生的科学成就、国际威望，以及他的处世待人、人品和音容笑貌，是研究陈省身的不可多得的宝贵资料.

蜚声国际数学界的领袖人物

R.E.Greene 写道:“在本世纪，数学研究的范围已经扩大到这样一种程度，使得我们要是更实际地看待数学发展的话，就得承认这是一种持续的合作的探索，而不是少数人独自工作的辉煌结果. 巨匠的年代似乎在本世纪初已经终结. 然而，即使在我们自己的时代还是有一些例外. 偶尔在一群活跃的数学家中会出现个别人物被一致公认为几十年中数学的某个广阔领域的领袖. 陈省身和微分几何就是这样一种情形. 数学上的领袖并非表现为官方权威的形式，而存在于他的同行的思想和数学的灵魂之中. 它是众多个体的尊敬和赞赏的一种合成. ”

值得注意的是，Greene 不仅对陈先生在数学界的地位作了恰如其分的评价，而且对于数学界的领袖意义作了透彻的解说. 即这个领袖地位不是强加在数学家头上的，而是他的数学工作领导了数学研究的主流，并对其他数学分支的发展产生实质性的积极影响. 在 20 世纪 30 年代以前，几何学尤其是微分几何的研究处于停滞状态. 黎曼几何由于在广义相对论中得到应

用而得到重视，但是它的研究却淹没在张量及其协变导数的计算之中. 霍普夫 (H.Hopf) 针对这种情形提出了研究大范围微分几何的想法，并提议研究流形的拓扑与它所赋予的黎曼度量的曲率之间的关系. 霍普夫自己就研究了高斯-博内 (Gauss-Bonnet) 定理在高维情形的推广. 陈省身在 1942 年发表的"高斯-博内定理的内在证明"一文宣告了大范围微分几何的一个新时代的开始. 他用黎曼流形内在的切球丛，给出欧拉示性式用曲率形式的显式表示，并且实现了它在切球丛上的超度. 这些观念和做法都是首创的. 他把尚处在发展阶段的拓扑概念与微分几何的局部不变量紧密而漂亮地联系在一起，使整个数学界为之震惊. 陈先生随后用同样的思想发展了埃尔米特 (Hermite) 流形上复向量丛的示性类理论，现在把这种示性类称为陈示性类. 这些工作使大范围微分几何、纤维丛和示性类的理论得到彻底改观. 在陈先生的工作倡导下，纤维丛、示性类和联络论成为 20 世纪 50 年代的主攻方向. 随后，阿蒂亚-辛格 (Atiyah-Singer) 指标定理、规范场理论、代数几何等等都把陈示性类作为基本不变量来使用. 后来，他把嘉当 (Cartan) 的等价方法、积分几何、子流形微分几何 (包括极小曲面)、微分几何在复变函数论中的应用等各个方面进行研究，每项工作都是开创性的，带动了一系列后续的研究和发展. 1984 年以色列政府授予陈省身先生"Wolf 奖"时对他的工作的评价是"他在整体微分几何方面的卓越贡献，其影响遍及整个数学".

20 世纪几何学的一代宗师

韦伊 (A.Weil) 曾经说过:"我相信未来的微分几何史家一定会认为他 (陈省身) 是嘉当在该领域内当之无愧的继承人. "

嘉当无疑是本世纪最伟大的数学家之一. 他在李群和李代数、微分几何和微分方程理论方面都作出了卓越贡献. 他在李代数方面的成就早就得到公认了. 但是他在微分几何方面的影响和声望是在他于 1951 年逝世后才上升到巅峰的. 正如伯格尔 (M.Berger) 所说:"陈省身把他 (嘉当) 的工作上升到他生前未曾受到过的普遍承认的水平. "

陈先生于 1936 年在汉堡获得博士学位时，做的就是嘉当的外微分法在几何中的应用，受到影响最深的是 Kähler 领导的关于 Cartan-Kähler 理论的讨论班. 后来，陈先生到巴黎随嘉当做一年博士后. 在那年嘉当开了一门外微分系统的课程. 那些后来成为布巴奇 (Bourbaki) 的年轻的法国数学家组织了一个"Julia 讨论班"，当年的主题恰好是"嘉当的工作". 由于陈先生已经熟悉了嘉当的方法，对嘉当提出的问题能给出解答，因而嘉当准许陈先生每两周到他家去讨论一次. 陈先生自己说:"在巴黎度过一年 (1937-1938) 后，我觉得嘉当的著作好读了，我能够以或多或少和他一样的方式思考"(见 Bourguignon 的文章).

陈先生回到国内时正值日本侵华战争爆发. 他在昆明联合大学除了教课外，主要是专心研读嘉当的论文. 陈先生回忆说:"他 (嘉当) 寄给我许多他的抽印本，包括一些过去的论文. 我花了大量时间研读这些论文，考虑其内涵和应用. 这确实使我受益匪浅. 在 30 年代，人们已经开

始认识到嘉当的工作的重要性，如 H.Weyl，布拉希克 (W.Blaschke) 和 E.Kähler，但几乎没有人去读嘉当旧时的论文 (有关李代数的论文除外). 我很幸运能因环境所迫把这些论文都读遍了. ”

由于陈先生娴熟嘉当的思想和方法，因此才能把它们灵活自如地运用在他自己的工作中. “高斯-博内定理的内在证明”就是这样一个杰作. 正是通过陈省身的卓越工作，人们才体会到嘉当的活动标架和外微分法的魅力. 尼伦伯格 (L.Nirenberg) 说:“他 (陈省身) 是一位精通嘉当的工作和技巧的大师. ”布洛 (F.E.Browder) 说:“他 (陈省身) 在使外微分式成为这个发展的中心工具的努力中扮演了主要角色. ”Palais 和滕楚莲进一步评价说:“有一个主旋律贯穿他 (陈省身) 的全部工作. 他精通微分形式的技巧，并将它巧妙地用于解决几何问题. 这是他的老师嘉当传递给他的魔杖，使他能够深入地探索这块他人难以进入的新领地. ”

杜卡莫写道:“在陈省身的事业刚开始时，微分几何之树几近干枯，而现在则是一个茂盛的花园，有着鲜艳的色彩和各种各样的分支. 陈省身在这个转变中起着基本的作用. ”在二十世纪四十年代，在美国只有拓扑学家，而没有真正意义上的微分几何学家. 正是陈省身把微分几何引进了美国. 尼伦伯格在他的贺词的一开头就说:“对我来说，陈省身代表微分几何先生. ”劳森 (B.Lawson) 说:“实在找不到一个几何学家，他在做学生或做博士后时不曾受到陈省身的影响. ”我们这些从事微分几何工作的人都是把陈先生的著作奉为经典来学习的.

陈先生在芝加哥大学培养了 10 名博士，在伯克利加州大学培养了 31 名博士. 在 1979 年庆祝陈先生退休的学术讨论会的闭幕晚宴上，陈先生的一名最早的研究生 L.Auslander 请陈先生的学生起立. 在这激动人心的时刻，博特 (R.Bott) 要求讲话，他说:“好极了，Louis 请陈省身的学生起立，这已经做了. 但是我要在这里说，以这种方式或那种方式，我们全部是陈省身的学生. ”这反映了过去的五十多年间微分几何学界的实际情况.

中国现代数学之父

周炜良先生在他的回忆文章中写道:“陈省身不仅是我们这一代的领袖数学家，而且还是中国的现代数学之父. ”

在程民德先生的文章中记叙道:“陈先生早在求学时代就认识到由于我国引进现代数学较迟，为求深造必须到最先进的国家留学，而留学的目的是要振兴现代数学. ”在 1937 年，陈先生结束了在巴黎随嘉当做博士后的工作之后回到国内，在当时极其困难的条件下执教于昆明西南联大，开设了李群，球几何和外微分方程等一系列新课程，培养了王宪钟、严志达和吴光磊等著名数学家. 在 1946 年他结束了在普林斯顿高等研究院的工作之后回到上海，以代理所长的名义创办了中央研究院数学研究所. 陈先生的政策是“训练新人”，收罗大批新毕业的大学生，每周上 12 小时的课，把他们引进现代数学的殿堂. 当时的助理研究员，如吴文俊、杨忠道、陈国才、廖山涛、张素诚等，后来都有特殊的成就，成为中国数学界的栋梁. 这些事情在吴文俊、

廖山涛、严志达诸位先生的回忆文章中都有生动、翔实的记叙.

陈先生促进我国数学现代化的努力最集中体现在中国实行改革开放政策之后. 随着中美关系的改善，陈先生从 1972 年开始回国访问. 当时由于文化大革命的错误做法，国内科学研究百业凋敝，在五六十年代好不容易建立起来的数学教育和研究的体系遭到彻底破坏，数学传统丧失殆尽. 陈先生回国访问无疑是从外界吹进来的清新空气，使国内人士认识到我国与国际水平的差距越来越大了. 以后，陈先生每年回国讲学，每次都介绍国际上数学的新近进展. 据我所知，在陈先生的推荐下，中国科学院数学研究所印发了 N.J.Hicks 的《Notes on Differential Geometry》，并且在数学所组织了讲习班，由吴文俊、张素诚、吴光磊三位著名数学家主讲拓扑和微分几何. 可以说，这是中国现代数学开始复苏的起步. 当时参加讲习班的年轻成员大多成为中国当代数学的中坚骨干力量. 值得指出的是，这些活动是在陈先生提议下举办的，是中国现代数学复苏过程中的一件大事，应该由中国数学史家记上一笔.

自从文化大革命结束，中国实行改革开放政策之后，陈先生直接参与了中国现代数学复兴计划，其中包括公派留学生到美国留学，以及后来由美国数学会和中国教育部牵头选送优秀学生到美国各一流大学攻读数学博士学位的所谓的“陈省身项目”. 结果是，在美国最杰出的数学家手下都有若干名最优秀的中国学生.

另一件大事是陈先生在 1980 年春到北京大学开设“微分几何”课. 这个课程吸引了全国各地的数学工作者，使得大范围微分几何学冲出了几何学家的狭小范围，对提高全国数学工作者的素质起到相当重要的作用. 正如谷超豪先生在文中所记述的那样，陈先生的这次讲学是整个计划的一个环节. 在此前后，由教育部和北京大学牵头，项武义、伍鸿熙、郑绍远、丘成桐、林节玄等华裔数学家先后回国讲学，帮助中国数学家了解世界数学的新成果.

陈先生从振兴中国数学的目标出发，先后提议举办双微会议、研究生暑期教育中心 (后来演变成现在的数学研究生暑期学校，在各重点大学轮流举办)，以及在 1988 年和 1991 年先后两次召开规模巨大的“21 世纪中国数学展望学术讨论会”研讨发展中国数学的战略. 这一系列措施在培养新人、促进我国数学现代化方面都起到不可估量的作用. 另外，陈先生在国家自然科学基金委员会、天元数学基金的设立和运作方面都倾注了不少心血.

作为振兴中国数学的一个具体措施，陈先生在 1985 年创办了南开数学研究所，并担任首任所长，每年确定一个主题，吸引全国各地的有关学者、年轻教师和研究生来所参加活动. 这些活动对于改变中国数学的面貌起着十分积极的作用. 在程民德、胡国定等各位先生的文章中对于办所的背景和具体情况都作了详细的记述.

改革开放以来的 30 年间，中国的数学已有长足的进步. 无论是国内的数学家，还是旅居海外的中国数学家，他们的研究工作已与国际接轨，在国际著名数学杂志上经常有中国数学家的论文，这在 30 年前是不可想象的. 随着形势的发展和变化，陈先生更进一步提出今后培养人才要立足于国内的主张，提出中国的数学要独立，中国要建设成为数学大国的思想. 这些在程民德、谷超豪先生的文章中都有记述.

总之，陈先生为中国现代数学的发展真正做到呕心沥血的. 难怪 J.P.Bourguignon 参加在上海举行的第二次双微会议之后写道:“访问陈省身的祖国，使我理解了他的博大胸怀. 我可以作证，在南开大学建立一个新型的研究所对他来说是多么重要. ”

青年数学家的良师益友

西蒙斯说:“任何一个和陈省身一起工作过或有交往的人都知道，他是一个不可思议的人物，他总是全心全意地鼓励你，支持你. ”格利费斯记述道:“陈省身真诚地对正在探寻自己道路的学生的研究工作和想法感兴趣. 他总是鼓励，还愿意指出某个想法可能不太有意思. ”

周炜良先生是陈先生的同龄人，也是在的同学. 他们尽管有不同的数学兴趣，但是经常在一起讨论数学. 在 1946 年春天，陈先生从普林斯顿载誉而归，到上海受命组建中央研究院数学研究所. 而周先生在 1936 年获得博士学位以后，由于环境所迫放弃了数学研究，力所能及地从事商业活动赡养一家老小，因而在数学方面的才能尚未引起人们的注意. 在这关键时刻，周先生得到陈先生的鼓励和帮助. 陈先生提供了他所收集的扎里斯基关于代数几何的论文. 并且告知韦伊将有重要工作要发表. 陈先生鼓励说:“尽管损失了大约十年时间，重返数学并不算太迟. ”为了使周先生尽快返回数学主流，陈先生建议他到普林斯顿高等研究院访问一年，并且已给莱夫谢茨 (Lefschetz) 去信建议他们给周先生发出访问邀请. 后来周炜良先生在数学上作出了杰出贡献，成为国际上著名的代数几何学家. 周先生在给陈先生庆祝他退休的贺信中说:“我将永远记住，主要是你的忠告，我才会在战后回到数学. 在我一生的关键时刻，若没有你的鼓励，我不可能对数学作出哪怕是十分微薄的贡献. ”

吴文俊先生是在战后进入中央研究院数学研究所，在陈先生直接指导下学习的. 吴先生在大学读书时对实变函数论情有独钟，由此进入点集论和点集拓扑. 当时在学习刚出版不久的亚历山德罗夫 (Alexandroff) 和霍普夫的《Topology》时，“由于对复合形的几何形象弄不清楚，对组合拓扑一直不理解，但对一、二章的点集拓扑却兴味盎然”. 于是，吴先生写了一篇综合报告，对于拓扑空间如豪斯多夫 (Hausdorff)、Regular、Normal 等等空间作了详尽的论述. 陈先生看了该文后的评语是:“方向不对头. ”吴先生记述道:“这一指点扭转了我的注意力，使我从此贯注于具有几何意义的实质性问题，而避免陷入概念与概念之间无穷无尽繁琐论证的泥坑之中. 这对于我此后的学术工作，其影响是难以估价的. ”

陈先生珍视年轻人取得的成果，以平等态度待人的故事是十分感人的，其中一个故事包含在劳森的文章中. 众所周知，陈先生在 1967 年写了一篇预印本，用活动标架方法阐述了西蒙斯关于极小子流形理论，他认为这在将来的发展中将扮演一个重要的角色，这就是流传很广的堪萨斯 (Kansas) 讲义. 同时，陈先生在伯克利开设了极小子流形课程. 在课程结束前，陈先生、杜卡莫和小林昭七 (S.Kobayashi) 解决了西蒙斯的论文中隐含的一个问题. 其时，劳森正在斯坦福大学打算结束研究生生涯. 在一次斯坦福-伯克利的联合学术讨论会前，劳森吃惊地

听到陈先生正在和围在他身旁的数学家谈论他的学位论文中一些结果的精确细节，而劳森除了写在笔记本上并与他的导师讨论过之外还从未披露过. 于是劳森感到极度沮丧，因为陈先生、杜卡莫和小林昭七显然和他一样推进了西蒙斯的某些新近结果. 劳森眼看着他的论文中的一个重要组成部分将要完全丧失了，但是当他鼓起勇气说他也证明了一些类似的定理时，陈先生表现出来的是完全善意的肯定. 结果是，劳森得到去伯克利访问几周的机会，并且陈先生在以后谈到这些结果时总要提到劳森的名字. 一个其学位论文墨迹未干的年轻人得到大师如此平等的待遇，让世人十分感动.

治学之道和教育思想

陈先生的女婿朱经武先生时常问他:“您成功的诀窍是什么? ”他常常亲切地说:“模仿并非成功之路. ”陈先生在探索自己的道路时，总是独立思考，不随波逐流. 最突出的例子是，1934 年他获得留美奖学金，却要求去德国留学，且要学习微分几何. 当时，微分几何并非时髦的研究领域. 陈先生在其研究生学业将结束时,“开始认识到整体微分几何的重要性. 那时，人们普遍认为，无论从需数学的广度还是问题的深度来看，它都是困难的课题. ”由于陈先生的灵感来自布拉希克关于微分几何的书，他又在 1932 年听过布拉希克在北京大学所作的“微分几何中的拓扑问题”的系列演讲，所以当他获得一笔奖学金时便决定去汉堡留学. 当时，这项选择是有相当风险的. 但是，陈先生“一旦发现了一件既新奇又有兴趣的事，便敢于接受并抓住不放. ”

在汉堡期间，陈先生受 Kähler 的影响最大. 那年 Kähler 刚出版一本书，即关于外微分系统的 Cartan-Kähler 理论. 在 Kähler 讲授他的书的讨论班上，陈先生是坚持到最后的少数几个人之一，并且他成功地运用 Cartan-Kähler 理论解决了 2r 维欧氏空间中 r 维子流形的 3-网问题.

格里菲斯在评论他第一次与陈先生的谈话时说:“我们的讨论是轻松的，又是实质性的，注重大框架和各种实例所表达的有趣特殊情形的互补. 对于陈省身来说，数学总是被置于历史观点来考虑的，并且他总是向前看，看哪些将会是有意义的问题. ”

正是陈先生对数学持有这种高瞻远瞩的观点，他始终主张读嘉当和达布 (Darboux) 的书，从这些著作中找灵感. 他自己就是这样做的.

在中央研究院数学研究所草创的头几年里，陈先生全神贯注于拓扑学的教学和倡导，每周有 12 小时的拓扑讨论班. 当时拓扑学尚处于新兴阶段. 廖山涛先生在回忆这段经历时说:“后来回忆起来，更使我惊讶的是，陈老师讲授的竟是代数拓扑以后几十年到现在，一些定型的材料. 但这些东西当时都刚刚出世不久. 何以如此呢? 我只好用他自己说过的话来解释了. 他说，一个好的数学家应当像在大海航行中那样，知道自己前进的方向. ”

除了做“好的数学”之外，陈先生还经常说:“做数学也要像习武一样，必须要精通十八般武艺. ”陈先生给人印象最深刻的是他有非凡的几何直觉和进行繁复运算的能力和爱好. 陈先生

在他八十高龄时说过:“我的数学实力在于我能算. 至今我不在乎繁复的计算，直到数年前我做这样的计算还很少出现差错. ”

在《几何大师》一书中还反映出陈先生的卓越的教育思想. 在他自己当学生的时候，对“学徒制”培养方式的弊病有透彻了解. 在 20 世纪 30 年代，国内数学界已有进步，但是老师往往不鼓励学生创新、做独立的研究，而要他们继续做老师自己的问题，结果少有青出于蓝的机会. 陈先生认为:“要使科学发展，必须要给工作者以自由. ”他指导学生就遵循这个原则.

郑绍远说:“陈先生有许多学生，并且给他们很多自由. ”杜卡莫描述道:“作为一个导师，陈省身决不去支配他的学生，而是让他或多或少自由地追求自己的兴趣. 实际上，他宁愿让每个学生以他的提示为起点发现自己的问题. ”例如，杜卡莫的学位论文是以劳赫 (Rauch) 的一篇文章为起点的. 当时，这篇文章比较难读，陈先生给他介绍这篇文章，并且说:“如果你读懂了这篇文章，它就会给你一篇学位论文. ”在陈先生同意当郑绍远的导师之后就问他，对什么课题感兴趣. 郑绍远说对拉普拉斯 (Laplace) 算子的特征值有兴趣，于是陈先生让他讲一讲有关 Minakshisbundaram 和 Plejel 在热方程渐近特征值方面的工作.

在铃木治夫准备学位论文时，陈先生让他读吴文俊关于庞特里亚金 (Pontryagin) 类的两篇文章，并且介绍他与托姆 (Thom) 认识. 托姆用闭子流形实现上同调类的工作做得很好，他对铃木治夫做实现斯蒂费尔-怀特奈 (Stiefel-Whitney) 类的工作给予很大帮助.

陈省身先生虽然离开我们有一年了，但是他的音容笑貌一直留在我们的脑海里，特别是他对我们的教诲将永远指导着我们的研究和工作. 从本书所收集的著名数学家对他的回忆和怀念的文章中，我们能够汲取他的崇高精神和治学之道，为实现陈省身先生要把我国建设成数学强国的理想而努力.

(原文刊载在《中国图书商报 • 阅读周刊》，2005 年 12 月 2 日第七版)

《微 分 几 何》前 言

本书是基础数学专业本科课程“微分几何”的教科书, 它的前身是我在 1990 年编写出版的《微分几何初步》. 自从《微分几何初步》问世以来, 北京大学数学学院一直以该书作为“微分几何”课程的教材, 我亲自讲授该书也有十多年了. 经过长期的教学实践, 我们感到该书条理性强, 简明扼要, 节奏明快, 重点突出, 取材和体例都很适用于教学的需要. 同时, 该书也受到许多兄弟院校同行的好评, 并且被采用为“微分几何”课程的教材或教学参考书. 因此, 该书在 1995 年获得教育部优秀教材一等奖. 但是, 该书出版 15 年以来, 微分几何课的教学改革已经取得很多进展, 在教学实践中也积累了更多的经验, 因此有必要在此基础上编写新的教科书. 有幸的是, 我们关于编写新的微分几何教科书的打算被列入教育部“十五”教材规划. 本书就是在这种背景下完成的.

由于《微分几何初步》的取材和体例是成功的, 因此这本《微分几何》仍然采用同样的取材原则和体例, 但是在文字上是全部重新写过的, 并且在内容方面吸收了教学改革和教学实践的新鲜经验. 大体上说, 新的教科书与《微分几何初步》相比较有以下几点改变:

1. 加强了曲线的切触阶的叙述, 增添了密切球面的计算 (§2.6).

2. 增设了新的一节论述存在对应关系的曲线偶, 特别是详细解说了关于 Bertrand 曲线的理论 (§2.7).

3. 增添了正则曲面上在不同的参数表示重叠的部分参数变换的计算 (§3.1), 这为今后要学习的微分流形理论提供了具体的模型.

4. 对曲面在一点的切空间重新作了解释, 特别是说明自变量的微分 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 作为切空间上的线性函数的意义 (§3.2).

5. 重新叙述了保角对应的充分必要条件的证明, 增加了等温参数系存在性的证明 (§3.5).

6. 增加了包络的概念, 具体地计算了单参数平面族的包络面, 并说明了它与可展曲面的关系 (§3.6).

7. 通过直接导出法曲率表达式的方式来引进主曲率和主方向的概念, 使得概念的引入更加自然 (§4.2).

8. 引进了指数映射和法坐标系的概念, 并且改进了关于测地极坐标系的叙述 (§6.3).

9. 增添了洛伦茨空间中的伪球面理论和负常曲率曲面模型 (§6.4).

10. 增加了大范围的 Gauss-Bonnet 定理的证明 (§6.6).

11. 全面改写了第七章, 特别是关于外形式、外微分式、外微分的叙述, 使得这些内容更便于初学者接受. 在第七章中还增加了大范围 Gauss-Bonnet 定理用外微分法的证明 (§7.5), 增加了在微分几何中外微分法的应用举例 (§7.6).

12. 全面改写了附录. 在附录中删除了关于张量概念的叙述, 重新给出一阶偏微分方程组的可积条件的证明, 增加了系数为复解析函数的一次微分式的积分因子存在性的证明, 增加了自共轭线性变换的特征值和特征向量的有关结论, 并且编写了数学软件包 MATHEMATICA 的使用入门和用 MATHEMATICA 做微分几何课的几个课件.

13. 我们还增添了一些习题, 并在书末增加了习题解答和提示.

由此可见, 我们对于第四章和第五章改动比较少. 实际上, 我们认为在《微分几何初步》中关于曲面论基本定理的证明是十分清晰的, 读者也很容易理解证明的步骤和方法, 关键是一阶偏微分方程组的可积条件, 在曲面的情形该条件就成为 Gauss-Codazzi 方程. 原书的这两章的叙述是简明扼要的, 是明白易懂的, 因此在新的书中没有作大的变动. 但是, 在教学实践中, 我们感到关于一阶偏微分方程组的可积条件的证明可以用读者更加容易接受的方式来叙述, 因此采用另一种更加直接的证明. 以上所有的变动都来自教学实践, 目的是使新的教科书更加贴近读者, 便于读者的理解和使用.

"微分几何"课的主要内容是三维欧氏空间中曲线和曲面的理论, 基本上是在 Gauss 的年代已经完成的, 距今已经有 150 年的历史. 因此, 关于该课程如何进行教学改革, 一直有不同的意见. 大家所关心的问题往往是: 开设该课程是否是必要的? 它能否包括在别的课程里? 它的内容如何现代化? 等等. 目前在我国虽然大多数综合大学和师范大学数学系把《微分几何》课列入了教学计划, 但是有的把它作为选修课, 而不是必修课, 结果是许多数学系本科毕业生没有学过"微分几何"课. 我们认为, 尽管"微分几何"课的内容是经典的, 但是它所传授的数学思想和观念仍然是重要的, 应该作为数学系学生的必修课. 事实上,"微分几何"课大体上安排在"解析几何"、"高等代数"和"数学分析"之后, 是本科学生在结束基础课学习后首次遇到的一门综合性比较强的课程. 首先, 在这门课里要系统地运用解析几何的知识, 要运用微积分的工具, 特别是要用线性代数知识去处理问题, 因此"微分几何"课是运用这三大基础课知识的理想场所. 一般来说, 会用学过的知识去解决问题能够使学生的成就感油然而生, 从而激发起更大的学习兴趣. 另外, "微分几何"课作为几何课, 是以培养学生的空间想象能力和直觉能力为课程的主要任务, 而空间想象能力和直觉能力是创造的源泉之一, 特别是通过"微分几何"课的学习, 学生对于空间观念的了解和理解将会提高到一个新的水平. 再有, 目前计算机在各种领域中的应用越来越普及, 几何造型和几何变换的知识需要被更多的人所掌握, 这也是"微分几何"课的任务之一. 因此, 我们认为在大学数学系"微分几何"课不仅不能削弱, 并且需要进一步加强, 经典内容的价值决不能被忽略.

"微分几何"课不仅是要介绍描述曲线和曲面的形状的方法、各种曲率的概念, 更重要的是要让学生知道什么是决定曲线和曲面形状的完全不变量系统, 也就是说曲线论和曲面论的基本定理应该是"微分几何"课的重点. Gauss-Codazzi 方程尽管是"微分几何"课中比较繁杂的内容, 但是它是课程的重要组成部分, 是理论性比较强的部分, 不能回避它.

曲线和曲面的整体性定理是微分几何中漂亮的结果, 但是它们的证明方法相对来说比较专

门一点, 因此不应该成为本科生的“微分几何”课的内容. 我们选择“活动标架和外微分法”作为本书的最后一章. 原因很简单, 因为活动标架和外微分法是 20 世纪由大几何学家 Elie Cartan 发展起来的方法, 后来由几何大师陈省身发扬广大, 炉火纯青地、成功地用于微分几何的研究. 现在, 外微分式和外微分已经成为现代数学的很有用的工具, 在“微分几何”课中介绍和普及这方面知识是适宜的. 在周学时为 4 的情况下, 我们经常把第一章到第七章全部内容作为课程的内容, 对于有经验的教员来说完成这样的教学计划并不很困难. 因为在第七章, 除了引进新的方法以外, 并没有新的几何概念, 所以学生在学习的时候一方面是“温故知新”, 一方面在用新的方法观察已知的问题, 会激发起更大的学习兴趣. 当然, 如果周学时是 3, 则只能把第一章到第六章作为课程的内容, 而第七章供学生自己进一步学习使用. 根据我自己的教学实践证明, 低年级学生是能够接受“活动标架和外微分法”的, 而本书所作的改进应该使学生学起来感到更加容易.

本书附录介绍微分方程的几个定理的想法是为了加强本书的自足性. 大学基础数学本科的“微分方程”课差不多和“微分几何”课是同时开设的. 另外, 在“微分方程”课中, 关于一次微分式的积分因子往往侧重于在特殊情形下寻求它的方法, 而不是它的存在性; 关于一阶偏微分方程的可积条件的证明却常常是被忽略的. 但是这两件事在微分几何中是非常重要的, 所以我们给出了完整的证明. 在教学时间有限的情况下, 教员不必讲授这些内容, 但是需要讲清楚它们的意义, 然后留给学生自学. 关于系数为复解析函数的一次微分式的积分因子存在性是证明曲面上存在等温坐标系的关键, 考虑到现有文献很难找到它的初等证明, 因此本书的附录是这方面文献的必要补充. 自共轭线性变换是线性代数中的重要理论, 它在微分几何课程中的应用是引人注目的, 为了方便读者起见, 在附录中简单地介绍了我们要用到的有关自共轭线性变换的主要概念和结果.

本书另一个附录是关于用 MATHEMATICA 做微分几何课件. MATHEMATICA 是功能十分强大的数学软件包. 我们在“微分几何”课的教学改革中, 曾经用 MATHEMATICA 显示曲面的图形, 特别是展示从悬链面到正螺旋面的等距变形, 收到很好的效果. 由于 MATHEMATICA 兼有数值计算、符号演算和图形显示的功能, 对于像“微积分”和“微分几何”这样综合性比较强的课程, 它是十分有用的辅助工具. 我曾经在文科学生的“高等数学”课中用一小时讲解 MATHEMATICA 的基本使用方法, 然后安排一定的上机时间, 结合课程让学生在计算机上学习微积分, 收到良好的效果. 现在, 我们在附录中介绍用 MATHEMATICA 做微分几何课件, 目的也是供学生自学, 通过学生自己动手学习更多的数学知识和几何知识. 如果学生有条件使用 MATHEMATICA 软件包, 则在“微分几何”课中可以做很多课件. 曾经有一位本科学生在“微分几何”课后用 MATLAB 编写了一个程序来判断两个给定的二次微分形式是否满足 Gauss-Codazzi 方程, 他在递给我看的时候表露出来的兴奋心情至今令人难忘. MATHEMATICA 不仅是学习数学的辅助工具, 也是研究数学的辅助工具. 我们的附录应该被看成是学习该软件的初等入门.

我们在本书的最后附加了部分习题的解答和提示, 目的是提高本书的可用性. 微分几何的证明题往往比较困难, 我们的重点是给出证明题的提示. 如果读者熟悉 MATHEMATICA 的话, 计算题在原则上都可以通过该软件来做.

根据我们在北京大学教学的经验,"微分几何"的后继课应该是"微分流形", 一般安排在大学 4 年级开设. 原因是,"微分流形"课的主要教学目标是扩大空间的观念, 并且学习如何处理局部定义的数学对象和整体定义的数学对象之间的关系, 学习光滑流形上的微积分, 这对学生进入现代数学的学习是十分重要的. 该课程的教材可用本书的参考文献 [2].

在本书的写作过程中, 作者得到北京大学数学科学学院、北京大学研究生院、北京大学教材建设委员会、北京大学出版社以及国家自然科学基金 (项目号:10271004) 的支持和资助, 作者在此向他们表示衷心的感谢. 北京大学数学学院的多位老师曾经用《微分几何初步》讲授过"微分几何"课, 特别是王长平教授和莫小欢教授现在主持"微分几何"课的教学, 对《微分几何初步》提供了不少意见和建议, 我对北京大学和兄弟院校的各位老师使用该书、并且提出宝贵的意见表示衷心的感谢.

本书完成之后, 北京大学出版社特别邀请李兴校教授审读一遍, 在此我对他的认真、负责的工作表示感谢. 最后, 作者对本书责任编辑邱淑清同志和刘勇同志的卓有成效的辛勤工作和一贯的支持表示深切的谢意. 限于作者的水平, 本书中的不足之处肯定是存在的, 诚恳地希望读者能不吝指正.

(陈维桓:《微分几何》, 北京大学出版社, 2006 年 6 月出版.)

《微 分 几 何》绪 论

这是本书的开篇. 本书是“微分几何”课程的教材. 在这里我们打算简要地介绍本课程的主要内容和教学目标.

几何学是数学中最古老的一门分科. 如果从欧几里得的《Elements》(《几何原本》) 算起, 至今已有两千三百多年的历史, 而且该学科长盛不衰, 其内涵一直在不断地延展之中, 以至于现在人们很难确切地回答“什么是几何学?”的问题.

相传几何学起源于古埃及尼罗河泛滥后为整修土地而产生的测量法. 它的英文名称“geometry”是由“geo”和“metry”组成的, 其意义就是“土地测量”. 在 1607 年利玛窦和徐光启把欧几里得的《Elements》合译成中文, 定名为《几何原本》, “几何学”的中文译名由此而得, 它十分形象地表现了“geometry”的原始的“大小”含义.

Thales(约公元前 625 年到 547 年) 曾经利用两个三角形的全等性质做过间接的测量工作. Pythagoras(约公元前 580 年到 500 年) 学派给出了直角三角形的边长之间的关系, 这种关系 (勾三、股四、弦五) 在我国汉朝人撰写的《周髀算经》中以周公姬旦与商高问答的形式也有记述. 但是几何学逐渐发展成理论的数学应该是在它从古埃及传到希腊之后. 哲学家 Plato(约公元前 429 年到 348 年) 确立了今天几何学中的定义、公设、公理、定理等概念. 古希腊数学所追求的是从少数几个原始的假定 (定义、公设、公理) 出发, 经过逻辑推理, 得到一系列命题, 由此积累了相当丰富的数学知识. 约在公元前 300 年前后, 欧几里得把当时古希腊所能得到的全部数学知识组织成一个严密的逻辑系统, 写成了《Elements》. 这是人类思想史上的一件大事, 是人类理性思维的第一个成功范例, 是数学的公理化方法的先驱, 其影响远远超越数学学科本身. 从此, “几何学”成为“逻辑推理系统”的代名词.

在古希腊时代, 《Elements》代表了数学的全部. 在欧几里得的《Elements》中所研究的最主要的几何图形是三角形和四边形等所谓的直线形, 以及最简单的曲线——圆. 在这里, 所谓的几何图形已经遵循《Elements》的定义, 即“点是没有部分的”, “线有长无宽”等等, 这就是说在讲到几何图形时已经运用了数学中的“抽象”手段. 例如: 三角形的边只有长度, 没有宽度; 三角形的顶点是两条邻边的公共点, 它没有大小. 关于单个的三角形, 最主要的问题是如何确定它的形状和大小, 而不计它在空间中位于何处. 对此我们有判断两个三角形全等的定理: 若三边对应相等、或两边及其夹角对应相等、或两角及其夹边对应相等, 则这两个三角形全等. 至于确定圆的形状和大小比较简单, 只要用一个量就可以了, 即有相同半径的任意两个圆有相同的形状和大小.

恩格斯在《自然辩证法》和《反杜林论》中对数学产生的历史、发展的动力及其应用和作用都有精辟的论述, 他给数学下了一个最恰当的最有概括性的定义. 他说: “数学的研究对象是

现实世界中的数量关系和空间形式."这就是说,"数"和"形"是数学的两大基本概念,整个数学是围绕这两个基本概念的演变而发展的,同时也是通过这两个基本概念应用到各个不同的领域中去的."几何学"当然是侧重于"形"的数学分科.但是,"空间形式"和"数量关系"两者是密切相关而不可分隔的.特别是在 17 世纪,笛卡儿和费马发明了坐标系,从此可以把数与数之间的关系描写为图形,反过来可以把图形表示成数与数之间的关系.这样,按照坐标系把图形化为数与数之间关系的问题进行研究的数学分科就称为解析几何学.在古希腊时代 Apollonius (约公元前 262 年到 190 年) 等人曾经系统地研究过圆锥曲线的性质,然而,在解析几何学中圆锥曲线恰好能够作为二次曲线的理论进行系统的代数处理.于是,解析几何学把一次曲线 (直线)、一次曲面,以及二次曲线 (圆锥曲线)、二次曲面作为主要的研究对象.解析几何学的研究范围与初等几何学相比已经有很大的拓广,除了研究圆和球以外,还要研究椭圆、抛物线、双曲线和椭球面、椭圆抛物面、双曲抛物面、单叶双曲面、双叶双曲面等等.要确定这种曲线和曲面的形状和大小,只要从它上面的点的坐标所满足的方程式的系数构造出若干代数表达式,当两条二次曲线或两个二次曲面全等时,相应的代数表达式便是相同的,反之亦然.我们通常把这些代数表达式称为二次曲线或二次曲面的 (代数) 不变量,其意义是它们只依赖于二次曲线或二次曲面的形状及其大小,与它们在平面上或空间中的位置无关,同时也与平面上或空间中所选取的坐标系无关.

笛卡儿和费马的坐标法将变数引进了数学,从而将运动引进了数学,因此为微积分的发明创造了必要的环境和条件.微积分要解决的首要问题是求曲线的切线斜率,以及曲线所围区域的面积,所以微积分在它产生的时刻就是和解决几何问题联系在一起的.作为微积分在几何学中的应用,微分几何学应运而生,它的主要内容是研究如何描述空间中一般曲线和曲面的形状,以及寻求确定曲线、曲面的形状及其大小的完全不变量系统.对于三维欧氏空间中的一条光滑曲线,用它的参数方程的若干次微商构造适当的代数表达式或它的积分可以得到它的弧长、曲率和挠率,它们刻画了曲线的形状和大小,并且两条曲线能够在一个刚体运动下彼此重合的充分必要条件是它们的弧长相同,并且曲率和挠率作为弧长的函数也对应地相同.因此,弧长、曲率和挠率构成了空间曲线的完全不变量系统.关于空间中的曲面,情况比较复杂一点.与曲线的弧长相对应的是曲面的第一基本形式 (一个正定的二次微分形式),通常称为曲面的度量形式,它可以用来计算曲面上曲线的长度、两个切向量的夹角和曲面上一块区域的面积等等.描写曲面的形状还需要另一个二次微分形式,称为曲面的第二基本形式.这两个基本形式合在一起构成了曲面的完全不变量系统,空间中两个曲面能够在一个刚体运动下彼此重合的充分必要条件是它们在经过一个参数变换之后有相同的第一基本形式和第二基本形式.

对微分几何学做出过杰出贡献的数学家有 Euler (1707~1783) 和 Monge (1746~1818),但是他们的工作主要限于如何描写和刻画曲面的形状.比如,Euler 发现曲面在任意一点处的法曲率 $\kappa_n = \mathrm{II}/\mathrm{I}$ 是切方向的函数,它在两个彼此正交的切方向上分别取到它的最大值和最小值,称为曲面在该点的两个主曲率.曲面在任意一点沿任意一个切方向的法曲率能够用主曲率表示

出来, 该公式现在称为 Euler 公式.

对微分几何学做出划时代贡献的是 Gauss (1777～1855), 他在 1827 年发表的《关于一般曲面的研究》中发现曲面的第一基本形式和第二基本形式不是彼此独立的, 他所导出的在曲面的第一基本形式和第二基本形式之间的关系式现在称为曲面的 Gauss 方程. 根据 Gauss 方程得知: 曲面在任意一点的两个主曲率的乘积仅与曲面的第一基本形式有关, 而与曲面的第二基本形式无关. 现在, 人们把曲面在任意一点的两个主曲率的乘积称为曲面在该点的 Gauss 曲率. Gauss 的这个惊人的发现意味着: 如果在平面区域上给定一个正定的二次微分形式 (称为度量形式), 构成一个抽象曲面, 则这个抽象曲面便有一定的弯曲性, 其弯曲性是由给定的度量形式决定的, 即该曲面的 Gauss 曲率.

在 Gauss 的时代之前, 关于欧几里得的《Elements》中的第五公设 (或与其等价的平行公理: 在平面上经过直线外一点可作、并且只能作一条直线与已知直线平行) 是否独立于其他公设已经经历了长期的争论和讨论, 人们试图从欧几里得的《Elements》中的其余公设导出第五公设, 均遭失败. Gauss 已经认识到可以用别的平行公理, 例如假设经过直线外一点有一束直线与已知直线不相交, 代替欧几里得的平行公理, 所得的几何系统仍然是相容的. 这个发现率先由罗巴切夫斯基 (1792～1856) 和 Bolyai(1802～1860) 各自独立发表, 后人称这种几何学为非欧几何学. Gauss 在《关于一般曲面的研究》中的上述结果在更深的层次上说明, 非欧空间与欧氏空间的实质区别在于空间具有不同的度量形式, 从而具有不同的弯曲性质. 欧氏空间是平直的 (Gauss 曲率为零), 而非欧空间是负常弯曲的 (Gauss 曲率是负常数). Gauss 的这个惊人的发现开创了一个新时代: 过去微分几何所研究的是欧氏空间中的曲线和曲面的弯曲性质, 而现在赋予度量形式的空间本身就是微分几何的研究对象. 人们把 Gauss 开创的只赋予度量形式的曲面论称为曲面的内蕴几何学. 他的这个思想后来被 Riemann (1826～1866) 进一步阐明. Riemann 认识到度量形式是加在流形上的一种结构, 而同一个流形可以有众多不同的度量结构. 现在人们把指定了一个度量结构的 n 维流形称为 n 维 Riemann 流形, Riemann 流形上的几何学称为 Riemann 几何学 (参看参考文献 [5]). 到目前为止, Riemann 流形是数学中关于弯曲空间的一种最成功的表述.

本书作为“微分几何”课程的教材, 其主要内容是研究三维欧氏空间的曲线和曲面的一般理论, 重点是如何描述曲线和曲面的形状, 并且给出在空间中确定曲线、曲面的形状及其大小的完全不变量系统. 此外, 本书还要介绍 Gauss 关于曲面的内蕴微分几何.

空间中曲线和曲面的参数方程是由 Euler 引进的, 现在常用向量函数来表示. 曲线和曲面的不变量是通过它们的参数方程的若干次微商借助于代数运算得到的, 因此向量分析自然是本课程的主要工具. 本课程是数学专业大学本科阶段首次综合性地系统运用解析几何学、线性代数和数学分析基础知识的场所, 它对于培养数学人才的意义和作用是不言而喻的. 另外, 它的内容在实践中仍然有广泛的应用.

在 20 世纪 40 年代发展起来的 Cartan 的活动标架和外微分法显示了它的强大生命力, 已

经成为微分几何学的有力工具. 我们在本书还要介绍 Cartan 的活动标架和外微分法在曲面论中的初步应用, 这对于读者了解微分几何学的现状有好处.

总之, 本课程的主要内容尽管是经典的, 但是它展示给读者的数学思想和数学方法, 以及为读者提供的运用数学基础知识的场所, 对于培养全面的数学人才无疑是十分重要的. 本课程是别的课程所不能替代的.

陈省身和他的《微分几何讲义》

20 世纪的几何大师陈省身先生离开我们已经两年多了. 但是他留给我们的数学，他对“好的数学”孜孜不倦的追求，他对年轻数学家的扶持、指导和鼓励，他为振兴中国数学所做的努力，将会一直激励我们在数学创新的道路上不断地前进，去实现他“使中国成为数学大国”的理想. 在这里，通过回忆陈省身先生 20 世纪 80 年代初在北京大学开设微分几何课程，以及撰写和出版《微分几何讲义》的过程，可以体会到他对引领中国现代数学发展的良苦用心.

我们的国家在 1980 年前迎来了科学的春天. 百业待兴，数学教育和研究事业同样处在重新起步的阶段. 陈先生对这种情况了如指掌. 在中美关系解冻之后，陈先生在 1972 年和 1974 年两次到国内访问和讲学，在“文革”的大环境下，为数学和基础理论研究重新在中国扎根吹进了一股清新的春风. 特别是在 1977 年陈先生再次回国，开始认真考虑复兴中国数学的计划. 作为该计划的主要环节，在 1978 年大批知名的华裔数学家回国访问讲学，在 1980 年春季陈先生在北京大学开设“微分几何”基础课，同时请 P.Griffiths 在中国科学院数学研究所开设“李群”课程，并且同年十月在北京召开微分几何、微分方程国际会议. 这样的考虑是深谋远虑的. 因为陈先生了解到在文革的十多年间，中国的数学研究停顿了，数学研究人才出现严重断档，因此他的建议是切中要害的. 陈先生的“微分几何”课实质上是他在芝加哥大学和伯克利加州大学所开设的流形论、联络论课程的翻版，意图就是把培养中国新一代数学研究人才的基础置于公认的国际水准之上. 双微会议的目的则是邀请国际一流的专家来引导中国数学研究，并且建立中国和国际数学界的联系.

在“微分几何”课开始之前，陈先生和北大的有关人士见面，并商讨课程的安排，出席的人有江泽涵教授、吴光磊教授等，我和其他几位年轻的同志作为工作人员也列席了见面会. 我们大家对陈先生都不生疏，因为在他回国讲学时，我们多次聆听过他的教诲，并且学习过他的不少论文. 然而，我们这些无名小辈和著名的几何学家陈先生面对面坐下来交谈确实还是第一次，激动的心情是不言而喻的. 陈先生对我们的关心使我们十分感动，特别是他提到能够一起工作也是一种缘分. 在见面会上江先生提出希望陈先生在讲课之后能够把讲义整理一下、并且在北京大学出版，我们这些负责做笔记的年轻同志可以帮助整理. 陈先生欣然同意这种做法.

陈先生的“微分几何”课是应北大、南开和中科院三个单位的邀请而开设的，除了正式注册的学员以外，还吸引了全国各地的数学工作者来听课. 北大第一教学楼 101 教室是当时学校里最大的教室，可以容纳二百多人. 每次上课，教室里教室里连过道都挤满了听众，正是盛况空前. 助教的工作包括辅导和记笔记. 每次课后，负责做笔记的同志，当晚就把笔记整理出来，尽快地刻成油印讲义发给每位学员 (当初学校里还没有复印机). 这次课结束之后的一个成果就是大家手中都有一本陈先生的讲课笔记. 陈先生讲过，听学术报告不要只是鼓鼓掌. 所以他提出，这次历时 7 周的课要有期中和期末两次考试. 考试题是陈先生亲自出的；考试成绩最好的前三

名能够得到陈先生的赠书作为奖励. 陈先生带来几本关于微分流形和微分几何的原版书，其中 Hicks 的《Lecture Notes on Differential Geometry》由我提议、并经陈先生的同意作为北大图书馆的藏书收藏，另外几本就作为奖品了.

在课程结束之后，确定由我进行整理. 原因大概是我已经经过两年再读研究生后即将留校，协助吴光磊先生工作. 另外，吴先生在整理讲义过程中是最称职的顾问. 还有一个因素大概是，在 1962-1964 年间，吴先生亲自给我们上过流形论、活动标架和黎曼几何课，采用的就是陈先生在芝加哥大学的油印讲义《Differentiable Manifolds》的讲法，我还保存着吴先生的讲课笔记可供参考. 由于当年 10 月在北京要召开双微会议，陈先生届时还要来主持会议，所以我和陈先生商定，在吴先生指导下赶紧把全书的目录和大纲拟定出来，并试写第一章，在陈先生回到北京时可以交给他审阅. 在陈先生审定目录和大纲之后，我就按照大纲一章、一章地写，每完成一章，我就给陈先生寄去，由他修改、订正，或提出修改意见，最后再定稿. 在 1981-1982 年，我们的通信很频繁，主要是讨论书稿.

陈先生的讲课总是十分精彩的，能够把听众的注意力吸引到关键点上. 但是，要把他对演讲记录稿演绎成书稿，需要在逻辑系统上进行推敲，在细节上作补充，而且这样的加工又不能失去陈先生的直接明了的风格，确实是困难的. 好在有陈先生的诸多著作可以参考，其中最主要的是他在芝加哥大学的油印讲义《Differentiable Manifolds》. 这本讲义可以说是后来所有微分几何教材的蓝本，它首次明确地叙述了微分流形的理论，广泛地使用了外微分式和外微分，并且用它来表述联络的概念. 当 1983 年我在伯克利加州大学进修时，在数学系图书馆里发现该讲义一直是借阅率很高的图书，直到现在还拥有众多的崇拜者. 可以毫不夸张地说，这本讲义在美国孕育出好几代微分几何学家，并且对美国许多著名大学的微分几何课产生巨大的影响. 另一本参考书是他的专著《Complex Manifolds without Potential Theory》，这也是一本重要的著作，非常简明地叙述了复流形、Hermite 流形和 Kähler 流形的理论，并且阐明了 Hermite 联络，证明了 Nevanlinna 定理. 陈先生在审阅大纲时提出，需要增加“李群”一章. 早在 1940-1941 年陈先生在西南联大就开设李群讨论班和李群课，但是我没有他关于李群的讲义可以参考. 于是，按照陈先生的建议，借鉴 Griffiths 在中科院讲授的李群课. 还有，吴光磊先生在我们的讨论班上讲授李群的笔记帮了我很多忙. 我相信，吴先生所讲的“李群”课肯定受到陈先生在西南联大的课的影响，比如李群的 Maurer-Cartan 形式的定义实在是十分精彩的. 我所体会的陈先生的用意大概是，一方面李群是活动标架法的基础，另一方面李氏变换群在主丛理论中起基本的作用. 所以最后我们在“李群和活动标架法”一章里把重点放在李氏变换群和活动标架的基本定理上面.

陈先生阅读书稿是十分认真的. 按照陈先生的精神，我们在书中把要讲的概念都落到实处. 比如，在讲到联络时，我们直接用单位分解定理构造微分流形上的联络. 一般联络的构造稍微有点繁，陈先生来信质疑，我就把详细的验证过程写了一遍给他寄去，才得到他的首肯. 这种认真精神还体现在专门请他的好友吴大任先生和田畴老师审阅书稿. 吴大任先生接受陈先生的

嘱托，非常认真地通读了全书，并且提出了许多宝贵的意见，改进了书稿. 田老师在审阅书稿的同时，还把陈先生的重要论文“欧氏空间中的曲线和曲面”翻译成中文. 陈先生同意将该译文作为《微分几何讲义》的附录.

对于《微分几何讲义》的成功整理，吴光磊先生的功劳是不能抹杀的. 除了吴先生在过去按照陈先生的讲义和思想，把流形论、联络论、活动标架和外微分法教给我，使我有胆量担当起整理陈先生讲课笔记的重任以外，在我具体的整理过程中吴先生还严格地把关，每一节、每一章都首先要经过他的认可，然后才能交给陈先生审阅. 比如，在第一稿时，我没有特别突出外微分和联络的局部性讨论的重要性，吴先生对此提出了批评，于是我精心地修改了这部分书稿. 确实是这样，流形论的主要观念就是要处理局部和整体之间的关系. 虽然单位分解定理提供了构造整体定义的数学对象的途径，但是外微分和联络的局部性质才能保证它们能够用局部坐标来表示，因此我们在书中对此作了详细的解说. 事实上，初学者在读书读到这里时，对于外微分和联络局部性的讨论仍然会感到困惑不解，只有在反复揣摩后才会有一些体会.

书稿完成之后，陈先生亲自给书起名，并且撰写了“微分几何的过去和未来”作为代序. 这本身是一篇十分重要的文献，简要地叙述了微分几何的发展历史，指出了流形论的意义和价值，对当前数学的研究和教学有深刻的指导作用. 第二个附录也是陈先生要加进去的，意在强调微分几何和物理学的密切联系，指出当前微分几何研究的若干重要论题. 陈先生特意要我在代序的最后添加一段，把为他的“微分几何”课服务过的同事名字一一记下来，这充分体现了他仁慈宽厚、平等待人、提携后进不遗余力的人格魅力. 《微分几何》正式出版之后，得到不少好评，使我稍许放心一点，总算没有给陈先生造成麻烦. 此后头几年，在陈先生回国访问和讲学时，见到我并且在谈到《微分几何讲义》时，总不会忘记说一句“这是你写的”，而我则每次都会由衷地回答道:“不，不，这是您的书，是您的数学. ”确实是这样，书由谁执笔并不重要；要紧的是创造这部分数学的人——陈省身. 《微分几何讲义》在 1983 年 12 月由北京大学出版社出第一版，1990 年由台湾联经出版社出繁体字版，1999 年由新加坡 World Scientific 出英文版，最后在 2001 年 10 月由北京大学出版社出第二版. 在英文版和中文的第二版中，增加了一章“Finsler 几何”，是由陈先生亲自执笔写成的，内有陈先生所发明的在 Finsler 流形射影化切丛上的 Chern 联络，以及由弧长的第一变分公式和第二变分公式导出的大范围黎曼几何定理，说明它们在 Finsler 几何的情形下依然是成立的. 这些内容有深远的意义，揭示了陈先生在他逝世前十多年间反复强调和提倡研究 Finsler 几何的原因. 到 2006 年 1 月，《微分几何讲义》已经在国内印了 46,000 册，可见它拥有很大的读者群. 有部分读者是慕名而读的，但是多数读者肯定是想了解这部分数学. 这本书影响了全国高等学校的数学教学，特别是微分几何方面的教学，普及了微分流形的基础知识，普及了联络论的初步知识和外微分法，对我国的数学和物理学的研究工作有很大的推动作用. 陈先生的课及其讲义强调它作为现代数学研究的基础. 无论是培养我国新一代数学研究人才，还是推动我国的数学研究较快地跟上国际水平，陈先生的决策是正确的，后来的实际发展情况完全证实了这一点.

在《微分几何讲义》定稿时，陈先生认为该书稍显简略. 这个评论是我后来写作《微分流形初步》的动力. 在执笔写《微分几何讲义》时，我尚无教学经验，我也不可能脱离陈先生的讲课内容任意发挥. 在该书出版后的前几年，我在北大开设研究生的微分几何课，一直以该书作为教材，听课的学生每年都在一百名左右. 我逐步地积累了阐述该书的讲稿，补充了习题，于是在北大正式形成了研究生的“微分流形”课，在该课程之后又另外开设了“黎曼几何引论”课，这样在北大就有了培养数学研究生的比较合理的、系统的几何课程. 《微分流形初步》就是北大的“微分流形”课的教材，由高等教育出版社在 1998 年出版，并且在 2001 年被教育部研究生办公室推荐为全国研究生数学教材. 如同该书的“前记”所说，这本书应该是陈先生的《微分几何讲义》的演绎和解说，是我们在北大实际讲授《微分几何讲义》的经验的产物.

在这里我愿意说一下陈先生对我的导师吴光磊先生所展现的善意和关怀. 陈先生多次提到过在西南联大有一批得意的学生，吴光磊先生是其中的一位. 而且吴先生是后来追随陈先生在国内做大范围微分几何研究、并且有成绩的数学家. 吴先生是极其推崇陈先生的，他在 20 世纪 60 年代开设几何课程以陈先生的讲义为主要内容，指导研究生所选择的课题都以陈先生的论文为主要参考文献. 吴先生最重要的研究论文“示性式的超渡”，是陈先生的历史性文献“在闭黎曼流形上 Gauss-Bonnet 公式的内在证明”的推广，是他在 20 世纪 50 年代主持的研究项目“联络论”的成果. 在吴先生身后，我在整理他的藏书时发现，吴先生保存了陈先生的全部论文的抽印本，是陈先生陆续寄给他的. 回想到解放以后、改革开放之前内外交流的困难程度，这几乎是一个奇迹，也说明了陈先生对吴先生和国内的数学研究工作的关切. 在陈先生的论文选集出版之前，能够收集到他的全部论文是一件非常罕有的事. 陈先生在吴先生逝世后首次回国讲学时，我与李安民和陈先生谈起吴先生患病和过世的情况，他表示十分惋惜，当即把待发表的关于“超渡”的论文拿过来写上“纪念吴光磊教授”，要我转交给吴先生的夫人张秋华教授表示对吴光磊教授的怀念. 几年后，陈先生在天津定居. 在有一次我去看望他之后，他特意要我转达邀请张秋华教授在方便的时候去天津到他家里做客、叙旧. 在吴先生逝世十周年时，我们计划出一本纪念文集，陈先生欣然答应了我们的请求，饱含深情地写了一篇回忆文章.

在听到陈先生逝世的消息时，我正在访问 Oklahoma 大学. 原本我打算在元旦过后回国，然后去天津探望他老人家. 这不幸的消息，使我十分悲痛. 我不能亲自为他送行，只能和魏诗曙教授联名发传真吊唁，并嘱托马辉替我献上一束鲜花表示我的敬意和哀悼. 在回国途中，我在伯克利作了短暂停留. 沿着伯克利校园内陈先生带我散过步的小径，在 Evans Hall 前，在 MSRI 楼前，在他请我吃过饭的许多餐馆前，我的脑海里涌现出陈先生亲切的音容笑貌，回忆着他的谆谆教诲. 陈先生的晚年把他的全部精力放在中国数学的复兴上面. 他的“微分几何”课和《微分几何讲义》是他为此做出努力的开始. 陈先生永远是我们的偶像和榜样. 我们将继续他的事业，为中国数学的进步而努力工作.

(原文刊载在《陈省身与中国数学》，该书于 2007 年 7 月由八方文化创作室 (世界科技出版公司) 出版)

《微分几何的例题详解和习题汇编》前言

在作者编写的"十五"国家级规划教材《微分几何》由北京大学出版社在 2006 年出版后, 受到许多兄弟院校同行的关注, 有一些学校要采用该书作为"微分几何"课的教材. 任课老师常常向我索要讲授该课的课件, 不少老师和同学也问我一些比较困难的习题的答案和做法. 恰好在此时, 高等教育出版社赵天夫编辑征求我关于出版微分几何方面的习题集的意见. 我想, 要使这本《微分几何》能够得到比较广泛的使用, 一本适用的教学参考书或习题集是不可或缺的, 于是我萌发了写作《微分几何例题详解和习题汇编》的想法. 我把这个想法和赵天夫编辑透露之后, 很快得到他的热情支持.

这本《微分几何例题详解和习题汇编》是和我所编写的《微分几何》相配套的教学参考书. 我关于本书读者的设想, 首先是"微分几何"课的任课老师和选修该课的同学, 此外还有准备报考基础数学研究生的考生. 由于"微分几何"课是在数学专业三大基础课 (解析几何、高等代数和数学分析) 之后开设的课程, 不可能象三大基础课那样在理论课之外配置"习题课". 在课上例题讲得比较少, 也不可能像在习题课上讲解做题的方法和技巧. 这样, 在课程设置从三大基础课到专门一点的基础课转变的关键时刻, 再加上几何学需要更多的空间想象能力, 选课的同学在刚接触该课程时常常会感到做题比较困难. 本书给出了超过一百个例题的详细解答, 基本上概括了微分几何习题的各种类型, 并且在解题过程中指出了解题的思路和方法, 它们可以作为课程的补充. 本书的习题汇编收集了 230 多个题, 内容比较丰富, 并且在书后给出了答案或提示. 为了同学能够掌握课程的主要内容, 每一章还列出了本章的要点和公式. 这可以作为选课同学复习该课程的复习提纲. 特别要指出的是, 在最后一章详细讲解了用活动标架和外微分法研究曲面论的基本想法、工具和方法, 这对同学进一步学习现代微分几何基础有极大的帮助.

在准备这本书时, 功夫却在书外. 您可以想象, 要给出每道题的答案, 必须要反复的计算和检查. 除了一百多道例题以外, 还要做二百多道题 (如果算小题, 则远远超过三、四百题), 工作量虽然不小, 却在书的篇幅上反映不出来. 为了读者的需要, 我们不得不做这样的努力. 但是, 书后附有"习题答案或提示"是一把双刃剑, 一方面给读者提供了方便, 另一方面又"害"了读者, 使读者失去独立思考和完成习题的机会. 为了降低后者给读者造成的损害, 我们提议读者在做题时不去读后面的答案或提示. 如果读者在做题时经过长时间思考之后, 仍然不得要领, 不妨"偷偷地"看一眼提示, 然后继续独立完成. 这样做的结果将对读者提高解题能力和理解能力有非常大的益处. 总之, 我们希望读者千万不要把"习题答案或提示"作为解题的拐棍, 只要把它作为"资料"就可以, 我们为此付出的努力也就值得了.

限于作者的水平, 本书的不尽人意的地方肯定存在, 恳请读者不吝指正. 另外, 借此机会向高等教育出版社的赵天夫编辑和有关同志表示深切的感谢, 本书由于他们的支持才能得以问世.

(陈维桓:《微分几何例题详解和习题汇编》, 高等教育出版社, 2010 年 1 月出版)

吴光磊传

简历：吴光磊 (1921～1991)，黑龙江省宾县人．微分几何学家．1943 年在西南联合大学数学系毕业，留校任助教．1946 年清华、北大、南开三校恢复编制，任清华大学数学系教员．1952 年院系调整，任北京大学数学系副教授．1963 年任北京大学数学系教授．1981 年我国恢复学位制度，国务院学位委员会批准吴光磊为首批博士生导师．吴光磊是我国著名的大范围微分几何专家，研究兴趣包括纤维丛微分几何和子流形微分几何，在自然辩证法和数学史、数理逻辑等方面有很深造诣．编写教材有《解析几何》等四种．

吴光磊在 1921 年 11 月 1 日出生于黑龙江省宾县 (原属吉林省)，他的父亲吴宗涵毕业于北京大学数学系，是一个爱国的、富有正义感的知识分子，一生从事教育工作，对于吴光磊的成长有深远的影响.

吴光磊的少年时代是在颠沛流离中度过的. 1931 年，他就读于吉林省第五中学. 当年，九一八事变爆发. 1934 年，吴光磊跟随他父亲吴宗涵逃离东三省，来到北平. 吴宗涵是有经验的数学老师，教学效果出色，随即在北平应聘于北平国立东北中山中学. 吴光磊自幼聪慧，又有父亲的教导，在 1935 年以优异成绩考入东北中山中学高中. 由于日本侵华势力的扩张，华北告急，东北中山中学在 1936 年迁往南京，在 1937 年芦沟桥事变后又迁往湖南湘乡县. 吴光磊和他父亲随同学校一起迁移. 1938 年吴光磊高中毕业，同时他父亲因为与校长思想作风不合，辞去东北中山中学教职，到另一所也在湖南的东北中学任教. 吴光磊因体弱多病，休养一年，然后随父亲所在的东北中学经湘西入川，在 1939 年考入在昆明的西南联合大学数学系就读.

吴光磊在西南联大读书期间生活十分贫苦，除少许贷金外尚需在中学教书以所得的微薄收入来维持大学生活. 在西南联大他孜孜不倦地勤奋学习，同时养成了一生俭朴、不尚奢华的生活作风，以及淡泊名利、献身科学的精神. 在大学期间，他的兴趣主要在几何、理论物理和数理逻辑. 据陈省身说，吴光磊选修过他的"微分几何"课，并且发现他有自主选择阅读材料的习惯.

1943 年吴光磊毕业，并留校任教. 同年，陈省身离开昆明赴美国普林斯顿高等研究院访问，主要从事纤维丛微分几何的研究工作. 吴光磊对此问题有兴趣，当时与陈省身有一些通讯联系. 1946 年恢复清华大学、北京大学和南开大学三校的编制，吴光磊成为清华大学的教员 (比助教高的职位)，继续跟随陈省身学习微分几何. 他在清华大学担任的课程主要有高等几何、射影几何等. 吴光磊的知识面很广，对数学有独特的审美观，有不少精辟的见解. 当时，数理逻辑方面的 Gödel 不完全定理引起很多人的兴趣，吴光磊是在清华园真正懂得 Gödel 不完全定理的学者之一.

1950 年吴光磊结婚，夫人是张秋华，后来成为北京大学著名的俄罗斯文学教授.

1952 年院系调整，吴光磊到北京大学任副教授，初期主要担任几何基础、解析几何等课程. 当时解析几何课采用莫斯科大学的教材，他和裘光明等一起翻译出版了狄隆涅和拉伊科夫的两卷本《解析几何学》.

从 20 世纪 50 年代起，吴光磊开始进行大范围微分几何的研究. 自 20 世纪 40 年代以来，微分几何的研究转向大范围微分几何，以陈省身为代表对 Riemann 流形的拓扑性质展开研究并且取得突破性的成果，对微分几何的发展产生了深远的影响，其里程碑式的工作是关于有向闭 Riemann 流形的 Gauss-Bonnet 定理的内在证明，以及随后发表的关于陈示性类的工作. 尽管当时国内外学术交流少，国内比较闭塞，但是吴光磊受陈省身的影响瞄准了这个方向进行学习和研究，成为国内从事大范围微分几何研究、并取得突出成就的专家. 在 1955 年发表的论文中，吴光磊考虑了紧闭有向 Riemann 流形上的 Grassmann 丛的自然 Riemann 度量具有与丛的局部积结构相配合的局部分解的条件，并在此条件下算出丛的 Betti 数. 此外还在切丛情形给出相应的积分公式. 1957 年发表的论文具有重要的意义，在其中考虑了隐蔽在 $2n$ 维欧氏空间中的 n 维可定向 Riemann 流形的法丛. 由于法丛的纤维的维数恰好等于子流形的维数，于是可以利用法曲率形式构造 Euler 示性式，现在常称它为法 Euler 示性式，它是在该 n 维子流形上大范围定义的 n 次外微分式. 吴光磊证明该微分式在子流形上的积分恰好等于该子流形在 Whitney 意义下的自交数；该积分公式可以看成是著名的 Gauss-Bonnet-Chern(陈省身) 公式在子流形法丛上的翻版. 由于当时国内外缺乏交流，论文又是用中文发表在北京大学学报上，因此吴光磊的这篇高水平的论文没有得到国际上应有的关注. 直到 20 世纪 70 年代前后，陈省身的学生 W.F.Pohl，以及 W.F.Pohl 的学生 J.White 在研究揭示 DNA 结构的轰动一时的曲线缠绕数积分公式及其在高维的推广时，才重新对法示性式进行讨论，其中的一种特殊情形恰好是吴光磊在 1957 年得到的结果 (参看 J.White, *Amer. J. Math.*, 91(1969),693-728). 由此可见，吴光磊是首位对法示性式进行研究的学者.

吴光磊在 1956 年开始指导研究生，初期的学生有梅向明和孙振组. 在 20 世纪 60 年代的学生有孟强和陈维桓. 1963 年，吴光磊晋升为教授. 我们国家于 1956 年间在向科学进军的号召下制定了全国科学发展纲要，吴光磊承担了微分几何中的联络论研究. 一般空间的联络论开始于 E.Cartan，陈省身对此做出了杰出的贡献，在 20 世纪 50 年代成为热门的研究课题，线性联络、主丛上的联络以及和乐定理等都有了正确的叙述和应用. 相对而言，国内的资料和教材极其缺乏，吴光磊在自己研习的基础上围绕这个课题开设了包括微分流形、李群初步、Riemann 几何、微分纤维丛和联络论等内容的课程. 用他自己的话来说，他学习微分几何是 (在国内，特别是在解放前的战争环境下以及解放后政治运动持续不断的环境下) 靠自己从书和杂志文章中一点一滴地啃下来的，经过了漫长的、孜孜不倦的摸索才获得学习大范围微分几何的途径，所以他的课程都是当时国内罕有开设的或首次开设的课程. 同时，吴光磊在此期间 1962 年前后完成了关于示性式的超渡的重要工作，但是论文发表却是在 14 年后的 1976 年.

在这项工作中，吴光磊用主纤维丛和相配丛上两个任意的联络给出了示性式在相配丛上的一般公式. 利用这个公式可以很自然地从 Euler 示性式得到陈省身在证明 Gauss-Bonnet 定理时所建立的超渡式，并且把这个公式用于陈示性类导出了陈示性类的超渡式和相应的积分公式. 因此，吴光磊的论文把陈省身关于 Gauss-Bonnet 定理的内在证明提高到一个新的高度去认识，并且获得了关于陈示性类的新结果. 在 20 世纪六七十年代国际上对示性类的超渡进行过紧张的研究，吴光磊的这项工作处于国际先进水平. 应该说，此阶段是吴光磊在学术上成熟和活跃的时期.

需要指出的是，吴光磊在教学上几乎是全力以赴的，无论是初次讲的课，还是教过多遍的课，他都认真备课，力求有新观点，更富有启发性. 所以，他在留校任教以后的十多年里，他的讲课成为系里一道独特的风景线，学生把听他的课作为一种享受. 他的板书精炼，讲话慢，几乎可以一字一句记下来，有的话当时可以听懂，有的话却是似懂非懂需要细心体会. 他对事情想得比较深，说话观点鲜明，言之成理. 但是在 1958 年他被下放到北京远郊门头沟斋堂村小学教算术；在 1959 年的“运动”中又被“拔白旗”，被批“到顶论”，原因是“他的课实在是讲得太好了，需要批判使之更好”. 这种荒唐的做法伤害了他，然而他矢志不渝，继续研习数学和微分几何，做出了出色的成果. 在 1960 年的“教育革命”要求重新编写教材，以他为首成立了《解析几何》编写组，成员有丁石孙、姜伯驹、田畴和程庆明等，该书在 1961 年正式出版，对于国内解析几何教学体系的形成有深远的影响，成为有关教材的蓝本. 在这个阶段，他除了指导研究生以外，还指导青年教师的教学和研究工作，先后有章学诚、田畴等几何教学小组的成员. 他在 20 世纪 50 年代所开设的微分几何课经过田畴的继承和努力 (后来还加上陈维桓的努力) 已经成为北京大学的经典课程.

针对数学教育界要砍几何课学时的倾向，吴光磊有一句名言，说他们是“得意忘形”. 这句名言一语双关，除了该成语的通常意思外，另一层意思是说你借助几何直观学懂了，得到这个“意”之后，却要抹杀这个几何的“形”的作用. 这句话十分深刻，值得后人引以为戒. 几何直观在数学中起到重要的作用，如果只强调表面的形式逻辑的东西，而把背后的基本思想、几何的思想丢掉了，无论对数学研究本身还是对于学生的理解而言都是很大的损失. 吴光磊主张，学生的几何素养要提高，不只是几何课的任务，所有的课程都要把几何直观的那一面讲出来. 吴光磊还常常对学生说，读别人的文章即使是读懂了，也只不过做了一次高级校对员，要读出自己的东西才算是真本事. 他不仅这样严格要求学生，自己更是身体力行，他的研究论文、撰写的教材和讲课无不体现了他的这种思想.

在“文化大革命”的十年浩劫中，吴光磊作为高级知识分子自然地受到不公正待遇. 特别是在 1969 年底他到江西鲤鱼洲干校参加劳动，后来染上血吸虫病，在 1970 年提前回到北京. 当时学校开始招收工农兵学员，吴光磊被指定给学生讲课. 1972 年，按照周恩来总理的意见，周培源校长在北京大学抓理科基础理论研究. 在这种情况下，《红旗》杂志开辟科学史专栏，约请北京大学写微积分历史. 尽管当时编者的指导思想是“左”的，但是北京大学成立的写作组认

为这是正确宣传数学的好机会，编写组包括邓东皋、孙小礼、吴光磊、丁石孙等 20 几位教师. 吴光磊以他自己关于数学史和自然辩证法的深厚造诣，实际上对该文的写作起到指导的作用，在写作组的讨论班上作了第一次微积分历史报告. 在第一稿写出来之后，吴光磊作了仔细的修改，包括内容、提法和文字修饰等. 几易其稿之后，成果以《微积分的理论是怎么来的?》为题发表在《红旗》杂志 1973 年第一期. 在当时的形势下，能够通过微积分的历史说明数学理论的重要性和数学家的作用是十分难能可贵的. 该文对我国恢复基础理论研究起到积极的推动作用. 在微积分历史的文章发表以及《马克思数学手稿》出版的鼓舞下，北京大学数学系许多老师分头对数学的不同分支学科展开数学史研究. 为了全面了解数学发展历史，吴光磊和江泽涵、申又枨、冷生明等不约而同地建议翻译 M.Kline 的《古今数学思想》. 吴光磊主动承担最后一章数学基础的翻译任务. 该书最后在 1976 年由上海科技出版社出版. 由于中美关系解冻，陈省身在 1972 年开始回国访问，提倡微分几何和微分方程方向的研究. 但是在国内数学基础理论研究差不多中断了十年，而且自 20 世纪 50 年代以来我国的数学教育中又削弱了几何内容，因此迫不及待的任务是普及现代微分几何的基础知识，于是 1975 年在中国科学院数学研究所举办微分几何讨论班，由吴光磊、吴文俊和张素诚主讲，其中吴光磊是真正熟悉几何大师 E.Cartan 的工作和现代大范围微分几何的专家，后来国内年轻一代的几何、拓扑和分析方面的骨干研究队伍就是那次讨论班之后形成的.

吴光磊因癌症在 1976 年和 1977 年两次动了手术. 打倒“四人帮”以后，1978 年国家恢复高考制度，陈维桓又回来继续研究生学习，另外李安民作为研究生师从吴光磊. 在这新中国“科学的春天”里，吴光磊满怀信心地不顾手术后身体虚弱，积极地投身到培养学生的工作中，并且活跃地参与国际和国内的学术交流活动. 1980 年，吴光磊参加陈省身倡导的在北京召开的第一届国际双微 (微分几何和微分方程) 会议，发表了论文. 该文将著名的 Cartan 引理推广到任意次的外形式和对称的多重线性形式的情形. 同时，吴光磊参与陈省身在北京大学开设的微分几何课，并且在随后由陈维桓整理陈省身讲课笔记过程中给与热情的指导. 所整理的笔记就是陈省身和陈维桓合著的《微分几何讲义》，在 1984 年由北京大学出版社正式出版. 在吴光磊指导下，陈维桓在 1980 年完成研究生毕业论文《欧氏空间中子流形的积分公式》，李安民在 1981 年完成毕业论文《一类新的曲率不变量与运动学公式》，这两项工作都属于大范围微分几何，与陈省身的工作有密切联系. 陈维桓留校任教后作为吴光磊的助手，担负起北京大学微分几何方面的教学工作. 同时，吴光磊一直关心和支持李安民在四川大学的工作，并且对他所取得的成就感到欣慰和骄傲. 李安民在 2009 年当选为中国科学院院士.

1981 年我国恢复学位制度，国务院学位委员会批准吴光磊为首批博士生导师. 在 1984 年以后，尽管吴光磊的健康状况不是很好，但是他每年春、秋两季仍然在讨论班上给出精心准备的演讲，主要内容围绕他一直在准备的《联络论》专著. 在此阶段，吴光磊发表了多篇论文，其中论文 (吴光磊，1984，1988) 是和陈维桓合作的，论文 (吴光磊，1984) 主要是讨论陈维桓在学位论文中提出的子流形上高阶平均曲率向量场的变分性质. 在论文 (吴光磊，1991) 中，吴

光磊将欧氏空间中闭有向子流形的 Pontrjagin 类和 Euler 类用 Grassmann 流形的 Plüker 坐标表示出来，他预期这些结果能够进一步用来给出示性类的组合公式.

1990 年春，吴光磊的健康状况恶化，但是他顽强地与病魔抗争，坚持研究工作和思考问题，论文 (吴光磊，1991) 就是在此期间完成的. 在那时去看望他的同学和老师，走进他的办公室都会看到他依旧坐在办公桌前工作的背影. 1991 年吴光磊因癌症复发住院，3 月 29 日终因心力衰竭与世长辞.

吴光磊对于发表论文持十分谨慎的态度. 他遗留下大量笔记，存有许多读书心得，是他一生勤奋耕耘的结晶. 可惜由于健康原因，生前未能将它们整理成文，没有实现他写作《联络论》的夙愿.

吴光磊对待教学工作极端认真负责，每次讲课都力求有新意. 他讲课深入浅出、言简意赅，在概念的分析方面尤为深刻透彻，富有启发性. 他主持写作的教材《解析几何》和单独编写的《空间解析几何简明教程》在国内产生过深远的影响，一直是有关教材的蓝本. 吴光磊还参加过许多重要数学著作的编撰、审校工作，例如中英数学名词的审定，大百科全书数学卷条目的审校，等等.

吴光磊是我国传统的为科学献身的优秀知识分子的代表，他在数学界的影响决不局限于微分几何这门学科. 他是北京大学传统的一部分，北京大学内、外的许多人都直接或间接受到过他的影响. 在吴光磊去世十年之后，陈省身对他评价说:“如时代不同，他必是国际一个更积极的参与者. 现在看到门墙桃李，他的贡献仍是不可磨灭的”.

(传记撰写者是陈维桓，原文刊载在《20 世纪中国知名科学家学术成就概览》数学卷第二分册，2011 年 10 月，科学出版社出板)

《微分几何引论》前言

自 2006 年以来, 我在首都师范大学数学科学学院为研究生开设"现代微分几何"课程. 在教学实践中我深切地体会到需要为刚进入数学研究生学习的同学编写一本适用的、关于现代微分几何的教材, 它既要能够满足各个数学分支的同学进一步学习现代数学的需要, 同时还要具有比较直观、浅显易懂、例题丰富、适应教学需要的特点. 本书就是在这样的背景下产生的.

我们知道, 现代微分几何是当前数学研究的主流之一, 而且它的思想、方法和所创造的众多工具影响和推动了许多数学分支的发展, 因此我们需要学习现代微分几何的基础理论, 获得进入现代数学殿堂的钥匙, 掌握从事现代数学研究的语言. 在这个意义上讲, 现代微分几何是新的"三高". 这一点也从国内、外数学研究生的教学情况得到证实.

请看"现代微分几何"课程在美国和我国的教学情况.

在 20 世纪 40 年代以前, 在美国没有几何学家. 研究几何的数学家都叫做拓扑学家. 陈省身 1943 年在美国做的几何工作"关于闭黎曼流形中 Gauss-Bonnet 定理简单的内在证明"震动了美国数学界, 数学家纷纷要了解微分流形、纤维丛、外微分等概念. 为此, 陈省身在 1948 年第二次赴美时在 Princeton 的 The Institute for Advanced Study 给出了系列讲座, 演讲内容整理成油印讲义《Topics in Differential Geometry》(1951 年), 其中主要讲解微分流形上同调理论, 黎曼流形, 主丛和示性类.

陈省身先生加入芝加哥大学数学系之后, 讲授微分几何, 在 1953 年出版油印讲义《Differentiable Manifolds》. 这本讲义成为美国几何教材的经典, 培养出美国好几代优秀的几何学家. 陈省身先生在 1960 年迁至伯克利加州大学, 使当地的数学系成为几何学和拓扑学的研究中心. 此后, 芝加哥大学的微分几何课在伯克利加州大学延续, 成为课号为 240 的著名课程, 半个多世纪来没有改变过, 数学系图书馆中油印讲义《Differentiable Manifolds》到目前为止仍然是借阅次数最多的书籍之一. 与此同时, 在美国许多第一流大学的数学系, 追随陈省身开设微分几何课, 例如 I. M. Singer 在 20 世纪 50 年代开始在 MIT 讲授微分几何, 成为十分引人注目的事件. 这种情况可以从黎曼几何教科书的出版情况来印证.

自从 A. Einstein 成功地运用黎曼几何来表述他的广义相对论之后, 黎曼几何受到学术界广泛的注意, 人们需要了解黎曼几何的思想、内容和方法, 因此有两本经典的教科书出版了, 它们是:

L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1926.

É. J. Cartan, Leçons sur le Géométrie des Espaces de Riemann, Gauthier -Villars, Paris,1925.

前一本书是用张量分析方法叙述的局部黎曼几何学, 内容详尽, 大量的是张量运算. 后一本书完全是 E. Cartan 的风格, 用法文写, 几何直观很多, 但是初读者往往会不得要领. 在这两本书中

都没有微分流形的理论. 能够作为教科书的还有专著

K. Yano and S. Bochner, Curvature and Betti Numbers, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953.

其内容已经涉及大范围黎曼几何, 但是主要是通过张量分析的办法进行计算. 值得指出的是, 在此后的长时间内没有关于黎曼几何的教科书问世.

直到 20 世纪 60 年代, 在美国各地纷纷开设现代微分几何课的基础上, 现代微分几何教材像雨后春笋般地陆续出版, 例如:

S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, 1962.

L. Auslander and R. E. MacKenzie, Introduction to Differentiable Manifolds, McGraw-Hill, 1963.(前者是陈省身在芝加哥大学的博士生)

H. Flanders, Differential Forms, Academic Press, 1963.(Flander 是陈省身在芝加哥大学的博士生)

S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, vol.I, II, Intersciences, 1963, 1969.(Nomizu 是陈省身在芝加哥大学的博士生,Kobayashi 是陈省身在伯克利加州大学的同事)

R. L. Bishop and R. J. Crittenden, Geometry of Manifolds, Academic Press, New York, 1964.

S. Sternberg, Lectures on Differetial Geometry, Englewood Cliffs, 1964.

J. N. Hicks, Notes on Differential Geometry, Van Nostrand, 1965.

D. Laugwitz, Differential and Riemmannian Geometry, Academic Press, 1965.

I. M. Singer and J. A. Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Scott Foresman, 1967, 等等.

这些书井喷式地出版都直接或间接地受到陈省身先生的课程的影响, 也反映了现代微分几何走进数学研究主流的事实, 同时奠定了研究生阶段的微分几何课的模式. 以后, 现代微分几何的教科书和专著就很多了.

我国在解放以后的微分几何教学是比较落后的. 经典的微分几何课很长时间以来是沿用前苏联的教材, 如

拉舍夫斯基, 微分几何教程, 高等教育出版社,1955 年版.

芬尼可夫, 微分几何, 高等教育出版社,1957 年版.

波戈列洛夫, 微分几何讲义, 高等教育出版社,1959 年版.

后来才有我国第一本自己编写的关于经典微分几何的教材:

吴大任, 微分几何讲义, 高等教育出版社,1959 年版.

以上所有的教材都是关于三维欧氏空间中曲线和曲面的基本理论. 至于现代微分几何的书在 1961 年以后才有, 如:

苏步青, 现代微分几何概论, 上海科学技术出版社,1961 年.
据书的前言介绍, 该书是在苏步青教授指导下, 讨论班在阅读 J. Favard, Cours de Géométrie Différentialle Locale(局部微分几何教程) 的俄译本的基础上、吸收了复旦大学在微分几何方面的成果写成的. 但是, 这并不是陈省身在美国所倡导的现代微分几何课程, 也就是说大范围的、内在的现代微分几何的教学工作当时在我国国内尚未开展.

1961 年中共中央在广州召开有关知识分子的会议之后, 纯粹数学专业学生的培养工作提到日程上来, 在北京大学恢复了几何、拓扑、代数、数论、函数论等等专门化方向的教学和研究工作. 吴光磊教授长期以来追随陈省身的研究工作, 此时开设微分几何专门化课程, 以陈省身在芝加哥大学的讲义《Differentiable Manifolds》为依据, 从 1962 年开始在北京大学比较系统地讲授现代微分几何, 内容包括: 黎曼几何, 微分流形, 外微分式和活动标架法, 联络论. 应该说, 这是在我国首次开设的现代微分几何系列课程. 但是, 影响仅及于北京大学几何专门化和拓扑专门化的少数学生. 当时我国的不少数学家都不甚了解微分流形和纤维丛的概念, 以至于在改革开放的最初那些日子里 (1978 年前后), 对经典分析比较熟悉的教学主管人员, 只认为硬分析是基本技能, 没有认识到数学概念的提升对于研究现代数学的重要性, 以至于对于学生追随现代数学研究经常口不离微分流形和纤维丛的现象颇有反感, 认为他们是追求时髦, 好高骛远, 误入歧途.

1971 年中美关系解冻, 陈省身先生从 1972 年开始访问国内, 并且在中科院数学所给出系列演讲, 促进了我国基础理论研究的恢复, 带来了国外数学研究的新信息, 在数学界吹进了一股清新的空气. 此时, 国内的数学界人士开始认识到我国在现代微分几何知识的普及上有非常大的差距, 因而与国际上数学发展的主流脱节, 需要迎头赶上. 在陈省身先生多次回国进行学术访问的激励下, 同时在陈省身先生的倡议下, 1975 年吴文俊、吴光磊、张素诚在中国科学院数学研究所开设讲习班, 讲授现代微分几何, 以 Hicks 的《Notes on Differential Goemetry》为主要参考材料. 这是我国数学复兴过程中一个极其重要的事件, 参加讲习班的同志后来都成为改革开放以后我国数学研究的第一批中坚力量.

1980 年 10 月陈省身先生提议的微分几何和微分方程国际会议在北京召开, 在该会议上邀请了一批国际一流的数学家报告现代数学研究主流课题的最新成果, 实际上这是一个为了使我国数学迎头赶上国际潮流的最高水平的讲习班, 同时也提供了我国数学界与国际数学界建立联系的极好机会. 为了使双微会议取得成功, 陈省身先生采取了另一个重要的行动, 即在 1980 年 5 月亲自在北京大学开设微分几何课, 参加者除了北京大学、中国科学院数学研究生以外, 还有从全国各地来的数学家. 讲课笔记后来整理成《微分几何讲义》于 1983 年在北京大学出版社出版. 全国范围的普及现代微分几何知识的工作就是从这里开始的, 这对促进我国数学研究与国际接轨、数学人才的培养起着十分重要的作用.

北京大学数学系是从 1984 年开始正式为研究生开设现代微分几何的课程的, 当时的现代微分几何课称为“黎曼几何”, 分为两个学期, 上学期是微分流形论, 下学期是黎曼几何初步. 每

次课的学生有 60-70 人, 选课的同学包括一些优秀的本科生. 在这种情况下, 从 1990 年起分设“微分流形”课和“黎曼几何引论”课.“微分流形”放在本科四年级上, 所用的教材成为由我编写的、教育部研究生办公室推荐的研究生教学用书《微分流形初步》(高等教育出版社,2001 年第二版);“黎曼几何引论”作为研究生课, 内容主要是黎曼几何基础知识和大范围黎曼几何, 所用的教材后来成为由我和李兴校合著的《黎曼几何引论》上册 (北京大学出版社,2002 年出版). 另外, 在本科二年级下, 或者本科三年级上, 北京大学数学学院还开设“微分几何”课, 内容是三维欧氏空间中曲线和曲面的基本理论, 所用教材是由我编写的《微分几何》(北京大学出版社,2004 年出版), 教学辅导书是《微分几何例题详解和习题汇编》(高等教育出版社,2010 年出版). 经过多年的实践证明, 这样的课程设置是合适的.

鉴于以上介绍的情况, 要提高我国高等学校数学教学和研究的水平,“现代微分几何”课程作为数学研究生的基础课是不可缺少的. 本书是进一步普及现代微分几何基础知识的一个尝试和努力, 力求所介绍的内容是现代微分几何的最基本的基础知识, 所采用的叙述方式是简明的、直观的, 证明是详尽的、完整的, 能够为读者提供比较多的例子和例题, 便于初学者掌握要领和弄清楚基本概念. 本书不是关于现代微分几何的全面讲解, 更不是现代微分几何前沿课题的介绍. 它的读者对象是现代数学的各个分支的研究生, 不只是限于几何方向的研究生. 我们希望看到, 越来越多的大学的数学研究生教学工作能够把“现代微分几何”课程列入教学计划.

本书能够写成和出版, 离不开首都师范大学数学科学学院给我提供的长达七年的上课机会. 在这里, 我非常敬佩李庆忠院长、酒全森副院长的高瞻远瞩和领导魄力, 并向一贯支持和关心本课程建设的吴可教授、李克正教授、戎小春教授、方复全教授和于祖焕教授表示感谢. 同时, 我要向多年来参加我的课程的各位研究生同学表示感谢, 他们对本课程的赞赏, 以及在课上和课外的提问和质疑是推动本书写作的动力.

本书是我自 2006 年以来在首都师范大学数学科学学院开设研究生基础课程“现代微分几何”的过程中形成的讲义. 此外, 我还要感谢田刚教授给我提供机会, 在位于北京大学的北京国际数学中心开设的研究生数学基础强化班第四期 (2012 年春)、第五期 (2013 年春) 上讲授本书的内容. 本书可以供数学系研究生基础课一个学期的课程使用, 作为微分几何课应该从 §1.1 讲到 §6.3. 在课时比较紧张的情况下,§6.4 可以供学生自学. 由于 §6.4 所用到的概念和方法在前面的各个章节中已经交代过了, 因此自学起来应该不会有什么困难, 而且实际上这部分内容的自学是对前一阶段学习成果的检验. 在我自己的教学实践中, 讲到联络时, 我往往会布置学生自学陈省身的论文《Vector Bundle with Connection》, 并且要求他们写出读书报告, 收到非常好的效果.

限于我本人的能力和水平, 本书的缺陷和需要改进的地方肯定是存在的, 衷心希望广大读者和专家能不吝指正.

(陈维桓:《微分几何引论》, 高等教育出版社, 2013 年 12 月出版.)

《微分几何引论》绪论

"几何学"这一个名词自古一直沿用至今, 但是它的内涵却在不断地扩充、深化和延伸, 以至于现在很难确切地界定什么样的数学属于几何学的范畴. 当代有多位大数学家, 包括陈省身先生在内, 时常调侃说: "几何学家做的数学就是几何学". 由于当代几何学的发展与数学的许多分支交织在一起, 因此从数学研究的角度来看, "几何学"更像是一种研究的风格, 或是一种研究的态度, 或是一种观察问题的方式. 这种看法体现在当前众多数学分支的名称上面, 例如: 几何分析, 复流形几何, 代数几何, 算术代数几何, 几何拓扑, 数学物理的几何方法, 等等.

经典微分几何就是三维欧氏空间中的曲线论和曲面论, 其所用的方法主要是向量分析, 即三维欧氏空间中向量函数的微分和积分, 主要目标是如何刻画三维欧氏空间中曲线、曲面的形状和大小, 以及研究曲线和曲面性质的方法和手段. 但是, 微分几何学的发展早就突破了传统的经典微分几何的范围, 其显著的特点是所谓的"内在性"和"大范围性".

所谓的内在微分几何的开创人是 C. F. Gauss. 我们知道曲面在每一点有两个彼此正交的切方向, 使得曲面沿这两个切方向的法曲率分别达到曲面在该点沿各个切方向的法曲率的最大值和最小值, 分别称为曲面在该点的主方向和主曲率. 因此, 曲面的形状可以用这两个主曲率来描写. 这两个主曲率的乘积称为 Gauss 曲率 $K=\kappa_1\kappa_2$, 它刻画了曲面的弯曲性质. 比如, 当 $K>0$ 时, 曲面在该点的邻近仿佛像椭圆抛物面在顶点处那样朝向一边弯曲; 当 $K<0$ 时, 曲面在该点的邻近仿佛像马鞍面在中心处那样向两边弯曲, 一部分在切平面的上方, 一部分在切平面的下方.Gauss 借助于曲面的自然标架的两次偏导数与求导次序无关的性质, 导出了曲面的第一基本形式和第二基本形式之间的关系式, 其中一个就是现在所称的 Gauss 方程. 根据 Gauss 方程, 三维欧氏空间中的曲面在每一点的 Gauss 曲率 K 能够用曲面的第一基本形式的系数及其不高于二阶的偏导数来表达, 即

$$K=\kappa_1\kappa_2=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{12}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{12}}=-\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{12}},$$

其中

$$\begin{aligned}
R_{1212}=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\partial u^2}+\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\partial u^1}-2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2}\right)+\sum_{\gamma,\delta=1}^{2}g_{\gamma\delta}(\Gamma^{\gamma}_{11}\Gamma^{\delta}_{22}-\Gamma^{\gamma}_{12}\Gamma^{\delta}_{12}),\\
\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=&\frac{1}{2}\sum_{\delta=1}^{2}g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}\right),\\
g^{11}=&\frac{g_{22}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{12}},\quad g^{22}=\frac{g_{11}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{12}},\\
g^{12}=&g^{21}=-\frac{g_{12}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{12}}.
\end{aligned}$$

这说明 Gauss 曲率是由曲面的第一基本形式完全决定的, 由此得到

高斯绝妙定理 曲面在作保长变换时, 曲面的 Gauss 曲率是保持不变的.

高斯绝妙定理的意义在于, 我们可以把曲面本身看作一个空间, 而根本不考虑包含它在内的外围空间 (即三维欧氏空间), 不考虑它在外围空间中的具体形状, 则该空间本身仍旧有一定的"弯曲"性. 这种弯曲性是由第一基本形式 (即度量形式) 决定的. 如果在一个二维区域上给定一个正定的二次微分形式, 把它作为该区域上的度量形式, 由此可以计算该空间 (抽象曲面) 中所有与度量性质有关的量, 如切向量的长度、夹角, 区域的面积, 等等. 在该空间中还可以求空间在任意一点处的 Gauss 曲率, 进一步还可以计算曲面上曲线的内在的测地曲率, 并且求曲面上的测地线 (测地曲率为零的曲线). 换言之, 微分几何学从研究三维欧氏空间中的曲线和曲面的形状和大小, 转变成对于弯曲空间 (抽象曲面) 的研究, 所谓的非欧几何学实质上就是弯曲空间的几何学. 这是一个在观念上十分了不起的飞跃.Gauss 所开辟的微分几何学的新时代称为内蕴微分几何学."内在性"指的就是这种空间 (它由空间所在的一个区域 D, 以及定义在 D 上面的一个度量形式 I 所组成) 本身的性质, 而不涉及可能包含它在内的外围空间.

在 Gauss 内蕴微分几何学的意义下, 欧氏平面相当于度量形式为

$$\mathrm{I} = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$$

的曲面, 它的定义区域是 $D = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$,Gauss 曲率为零. N. I. Lobachevskii 和 J. Bolyai 的非欧平面是度量形式为

$$\mathrm{I} = \frac{4((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}$$

的曲面, 它的定义区域是 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$,Gauss 曲率为 -1. 在该曲面上测地线是区域 D 内与边界圆周 $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ 正交的圆弧和直径, 而测地线就是非欧平面上的直线, 所以 Lobachevskii 和 Bolyai 的非欧几何公理显然是成立的, 即过直线外一点至少有两条直线和已知直线不相交.

Gauss 的曲面内蕴几何实际上就是最一般的非欧几何. 此时有

Gauss-Bonnet 公式 设 C 是抽象曲面 (D, I) 上以测地线为边的三角形,$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它的三个内角, 则它的三个外角 $\pi - \alpha_1, \pi - \alpha_2, \pi - \alpha_3$ 之和是

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) = 2\pi - \iint_D K \mathrm{d}\sigma.$$

特别地, 在欧氏平面上 Gauss 曲率 $K = 0$, 所以三角形的内角和是

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi.$$

B. Riemann(1826-1866) 对 Gauss 的思想有深刻的理解, 在他为取得讲师资格所递交的论文《关于几何学的基本假设》(1854 年) 中把 Gauss 的曲面内蕴微分几何一举推广到 n 维情形, 定义了 n 维黎曼空间.

首先, Riemann 提出了流形的观念. 在黎曼的心目中, 排成一定次序的 n 个自变量 $(x^1, \cdots, x^n)$ 被看作一个动点 x, 每一个自变量称为该动点的坐标, 而动点的变化范围就是所谓的 n 维流形. 当然, 局部坐标系允许作变换, 要求变换函数都是任意次连续可微的. 接着, 他认为流形上曲线的长度可以在规定了 (无穷小) 切向量的长度之后通过积分来计算, 而 (无穷小) 切向量 $\mathrm{d}x$ 的长度 $\mathrm{d}s$ 可以是 $\mathrm{d}x$ 的分量的任意的非负一次齐次函数, 要求该函数的值在 $\mathrm{d}x$ 的分量全部反号时不改变, 例如它可以是 $\mathrm{d}x^i$ 的处处取正值的二次齐次多项式的平方根, 或 $\mathrm{d}x^i$ 的处处取正值的四次齐次多项式的四次方根, 其中齐次多项式的系数是变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的连续可微函数, 等等. 前面的第一种情况就是现在所熟知的黎曼度量. 由此可见, 黎曼几何是 Gauss 的曲面内蕴几何在任意维数 n 时的推广, 曲面的内蕴几何是二维的黎曼几何.Riemann 还在他的著名报告中给出了公式

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{d}x^i)^2}{\left(1+\dfrac{c}{4}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x^j)^2\right)^2},$$

并且断言这样的度量形式有常曲率 c. 应该说, 黎曼几何就是用内在的方式研究空间, 不再把该空间看作任何高维欧氏空间的子空间; 另外, 该空间是弯曲的 (有非零的曲率张量), 不再是平直的欧氏空间. 这种空间模式为广义相对论 (A. Einstein(1879-1955), 1916 年) 的产生做好了数学上的准备.

为了理解 Riemann 的思想, 并且要弄清楚空间的曲率的意义, 数学家花了半个多世纪的努力, 做出特殊贡献的有 E. B. Christoffel (1829-1900), C. G. Ricci (1853-1925) 和 T. Levi-Civita (1873-1941). 最重要的进展是发现了协变导数, 协变微分和平行移动的概念, 在 Ricci 的时代它们以绝对微分学的面貌出现在世人的面前, 现在这些内容构成了微分流形上联络的理论. 从微分几何学对于数学各分支学科的贡献来说, 最重要的是它提供了弯曲空间作为展开现代数学的舞台, 另外它给出了联络的概念, 这是对微分流形上的切向量场 (和一般的张量场) 求微分 (或求导数) 的手段.

在 20 世纪 20 年代末,Heinz Hopf 热衷于黎曼流形的曲率和拓扑之间联系的研究, 即所谓的大范围黎曼几何. 如所周知, 下面的定理就属于大范围微分几何:

Gauss-Bonnet 定理 对于 2 维有向闭曲面 S 有

$$\int_S K\mathrm{d}V_S = 2\pi\chi(S) = 4\pi(1-g(S)),$$

其中 $\chi(S)$ 是曲面 S 的 Euler 示性数,$g(S)$ 是曲面 S 的亏格.

H. Hopf 自己把 Gauss-Bonnet 定理推广到 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的 $2n$ 维有向闭超曲面的情形. 在 1942 年陈省身用内在的方式重新证明了偶数维有向紧致黎曼流形的 Gauss-Bonnet 定理, 成功地使用了黎曼流形的球丛 (单位切向量构成的纤维丛), 将黎曼流形上的 Euler 示性式提升到球丛上来考虑. 这是对于大范围黎曼几何的具有里程碑意义的贡献.

大范围黎曼几何在 H. Hopf 及其学生, 和陈省身等人的努力下有惊人的发展, 尤其是在 20 世纪的 60~70 年代, 重点是探讨所谓的"球面定理", 即一个完备的黎曼流形的截面曲率限于什么范围内, 则它必定与标准球面是同胚的, 或是可微同胚的. 现在, 大范围黎曼几何是现代微分几何研究的主要课题, 内容包括: 曲率的拼挤问题 (正曲率拼挤, 负曲率拼挤, 在零曲率附近的拼挤, 等等); 具有指定正负号的 (各种) 曲率的黎曼度量的存在性问题; 黎曼结构的空间的有限性、紧致性和塌缩问题; 黎曼对称空间; 在给定的紧致流形上有特殊要求的黎曼度量的存在性问题 (如 Yamabi 问题); 黎曼流形的谱问题; de Rham-Hodge 理论;Yang-Mills 理论;Ricci 流和热流问题; 调和映射;Kähler 流形的几何;Atiyah-Singer 指标理论; 极小子流形和有关的问题, 等等. 这些问题的研究与拓扑学、几何分析、偏微分方程、复分析、数学物理等许多数学分支有密切的联系. 在 20 世纪 30 年代, 曾经有人认为微分几何是已经过时的课题, 然而过了半个多世纪之后微分几何却成为数学研究的主流, 而且它的思想、方法和所创造的众多工具影响了许多数学分支的发展, 这就是我们现在要学习现代微分几何的理由.

前面的讨论告诉我们, 大范围黎曼几何是现代微分几何研究的主要课题. 但是, 我们在这里所谈的现代微分几何并不是指学科本身, 而是指要开设的基础课程. 当代数学的发展需要微分几何, 主要是因为微分几何提供了微分流形和纤维丛这样的空间模式作为展开数学的舞台, 在这种空间中可以定义联络的概念, 使得在该空间中能够对向量场和任意的张量场求微分. 然而, 这种空间模式不再是平直的, 而是弯曲的; 不限于是局部的, 而是大范围的; 不是作为某个外围空间的一部分, 而是以内在的方式来定义的. 因此, 我们需要在这门基础课程中以内在的方式、大范围的方式介绍不再是平直的 (从而是弯曲的) 空间模式.

在现代微分几何课上应该介绍这些基本概念和基本方法, 这不仅是为学几何的学生打基础, 而是为所有学习数学的学生服务的, 使他们能够象学习"三高"(数学分析, 高等代数和解析几何) 基础课那样, 获得进入现代数学殿堂的钥匙, 掌握从事现代数学研究的语言. 在这个意义上讲, 现代微分几何是新的"三高". "现代微分几何"课程的内容应该包括: 微分流形, 切向量, 切向量丛, 切向量场, 外微分式和外微分, 联络, 黎曼度量和黎曼联络. 为了处理高维空间, 线性代数成为不可缺少的工具, 因此针对几何学的需要, 在本课程有一章预备知识介绍对偶向量空间, 张量和外形式.

祝贺高等教育出版社成立 60 周年

衷心祝贺高等教育出版社成立 60 周年!

高等教育出版社是我们的良师益友. 我在中学就学阶段, 就已经成为高等教育出版社的读者. 我至今还收藏着 20 世纪 50 年代所购买的两本书: 维诺格拉陀夫的《数论基础》(裘光明译)和库图佐夫的《几何学》(董克诚译). 在高等教育出版社初创阶段, 主要的业务是出版前苏联教材的中译本. 这两本书应该是该阶段成果的一部分.

这两本书都给我留下深刻的影响. 在第一本书中有华罗庚撰写的"介绍数论基础", 其中有一段话指导着我后来的学习生活, 即"如果读这本书而不看不做书后的问题, 就好像入宝山而空返, 把这书的最重要部分忽略了". 后来我在自己的教学中多次向同学表达过做好习题的重要性的这种思想. 第二本是我的兴趣所致, 全书通读过多遍, 提高了我对于中学阶段所学的初等几何学的理解, 初步了解了何谓高等几何学.

在我进入北京大学数学系学习后, 则始终与高等教育出版社的出版物为伴了. 例如: 菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》, 吉米多维奇的《数学分析习题集》, 辛钦的《数学分析简明教程》, 狄隆涅的《解析几何学》, 马尔茨夫的《线性代数基础》, 库洛什的《高等代数教程》等等, 都是我们手中常备的教材或教学参考书. 到 20 世纪 60 年代, 高等教育出版社开始出版我国数学家自编的数学教材, 如吴大任编写的《微分几何》和北京大学数学系许多老师编写的各种数学教材. 这样, 高等教育出版社对我们而言变得更加亲切了.

改革开放以后, 我又回到北京大学任教, 与高等教育出版社的接触就多了. 首先, 我先后在教育部的几何拓扑教材组和应用数学教学指导委员会工作过, 高等教育出版社的一些专业同行是这些教材组或教学指导委员会的联系人, 经常在一起开年会和工作, 彼此就熟悉起来了. 其次, 我开始在高等教育出版社出版一些教材, 比如我所编写的《微分流形初步》(此书成为教育部推荐的研究生教学用书),《流形上的微积分》(此书是萧树铁教授主编的大学数学丛书中的一册),《微分几何例题详解和习题汇编》(此书是与我在北京大学出版社出版的教材《微分几何》相配套的教学指导书) 和新近出版的《微分几何引论》. 后者是数学研究生的教材, 内容涵盖了现代微分几何的基础, 包括微分流形的基础知识、联络的基本理论和向量丛的示性类等等, 为数学研究生学习和研究数学提供了必要的语言、工具和思想.

高等教育出版社在成立之初几乎垄断了我国高等教育教材的出版. 改革开放以来, 各著名大学自身的出版社如雨后春笋般地出现, 打破了高等教育出版社曾经拥有的垄断地位. 但是, 高等教育出版社仍然是我国高等教育教材出版界的旗舰, 它的发展规模已经是初创时的好几倍, 不再是单一的一个出版社, 而是一个出版集团, 下属有好几个分社. 祝愿高等教育出版社越办越好, 越做越强, 成为在国际上有影响力的出版公司, 支撑我国的高等教育事业取得更大的成绩.

(此文是陈维桓在 2014 年 5 月应高等教育出版社蒋青编辑的邀约撰写的.)

陈维桓答北京十一中学朱浩男老师问

1. 问：当初您为何选择数学这门职业?

答：数学是一个学科, 是一个专业, 不是一个职业. 我后来的职业是数学老师. 当然有少数人成为职业数学家, 专门做纯粹数学研究, 靠国家养起来. 不过这部分人很少, 而且遵循的是前苏联的传统. 在欧美国家, 以及我国, 最普遍的是数学教学兼做数学研究, 专职从事数学研究者是很少的. 因为研究数学很难持续不断地找到有价值、又能着手的问题，很难有预期成果, 这样"吃饭问题"就解决不了，谁去养活你? 更重要的是，教学过程是一个自我逐步提高的过程，尤其是现在数学已经门类十分广泛深刻的情况下更是如此. 因此，学数学做数学，需要有一个"职业", 或者是教书，或者是某应用部门，或者是某研究部门，有一个用数学的环境. 选择数学作为我的专业是出于兴趣, 以及在学习过程中感受到数学应用的广泛性, 处理问题的条理性和推理的严格性. 在解题的时候, 所用的技巧也有很大的吸引力, 尤其是在解几何题时成功地添了一条辅助线便得到解决, 很有成就感.

2. 问：您认为数学学习最需要的是什么?

答：兴趣和好奇性，持之以恒的学习和追求，不怕困难，勇于克服困难.

3. 问：在数学科研过程中遇到的最大困难? 您是如何解决的?

答：在我自己的科研过程中最大的困难是选题，选择一个好的问题，既有广阔的发展前景，又是在自己能力范围内处理的. 解决的办法是：不断地学习和交流. 学习现有的文献，发现问题和思考问题，结合所考虑的问题不断学习新知识. 在攻关的时候，经常是废寝忘食，而灵感出现往往在一瞬间，这是日思暮想的结果. 机遇往往给与有准备的人，这里的"准备"包括知识储备，对所感兴趣的问题的思考和了解，等等.

4. 问：数学家之间的合作是否是必要的?

答：现代数学的范围很广，但各学科是互相联系的. 由于现代生活节奏快，数学家之间的合作是十分必要的，收效会更大，互相有启发. 当然，在尝试攻克难题时，有的数学家会关起门来做研究，这也很有必要，避免外界干扰，也防止信息外泄. 但是，多数情况下，一个数学家的团队取得的成就会更大，影响也更大.

5. 问：您认为数学竞赛是否有意义? 对我们未来的发展有什么作用或者影响?

答：我认为纯粹是做难题或偏题的数学竞赛，意义不大. 在中学阶段，进行竞赛培训，只能在某些学科方面进行强化训练，比如初等数论，初等代数，或者初等几何，而且强调的是技巧性的，不是基础理论性的. 这些培训对培养兴趣、能力有好处，但是离开现代数学很远，不是一回事情. 现在有一些新的竞赛，比如建模竞赛，等等，着重于分析问题和解决问题能力的提高，培养团队合作精神，对今后的发展很有益，值得提倡.

6. 问：您认为竞赛报送的学生与通过高考考入北大的学生有什么明显的能力区别?

答：因人而异，不能笼统谈论两者之间的差别. 一般来讲，在竞赛中取得好成绩的同学对数学有很大的兴趣. 但是，大学数学和竞赛的数学是两回事，完全不一样. 一个对此没有思想准备的学生进入大学之后，会迷失方向，会在困难前低头. 这样的学生在北大也存在. 相反地，如果一个学生有远大的理想，自觉地安排自己的学习，刻苦地学习，则会取得成功，这方面的例子举不胜举.

7. 问：您是什么时候开始考虑职业选择和未来规划的?

答：我们这一代的情况和你们不一样. 当时，“听从祖国的召唤”更重要，“哪里需要到哪里去”是我们那一代人的理想. 现在的学生更多的考虑是如何实现自己的人生价值. 我们在考虑职业时无从选择，是服从分配的. 当然在做人生规划时，选择读研究生深造是自己的决定，那是发生在大学毕业时的事情.

8. 问：数学最让您痴迷的地方是什么?

答：我对数学还没有达到“痴迷”的程度，所以我还不是一个出色的数学家，只是一个还有一点小名气的数学老师和几何学专家. 我对数学感兴趣，在中学时主要是几何学最吸引我的注意力. 我有比较强的解题能力，不过对几何学的全貌并不了解. 因此，我在中学的时候曾经系统学习过库图佐夫的《几何学》，其中系统地讲授了初等几何学的各个方面，包括几何变换和公理化. 到大学之后，数学分析的严格性和技巧使我很着迷，代数的公理化系统使我第一次接触到严格的推理系统. 应该说在课堂上首次学习，往往不能领会其中的奥妙，需要课后继续系统学习，加深和提高. 我对那些特别感兴趣的学科在课后都进行过再次的系统学习和钻研，收获极大.

(2014 年 10 月陈维桓应朱浩男老师邀请参加北京十一中学的数学文化节活动, 做一个关于陈省身先生的数学贡献的报告, 并接受朱老师的采访.)

我的老师丁石孙先生

丁石孙先生虽然身居高位，但是对于我来说，他始终是我最尊敬的一位老师. 与他见面时，我们都会称他为“丁先生”，或者亲切地叫他一声“老丁”.

我认识丁先生是在 1963 年的下半年. 当时，丁先生给我们开设“近世代数”课，用的是他和曾肯成等先生正在翻译的、范德瓦尔登著的“代数学”. 在 1962 年党中央在广州召开关于知识分子政策的会议之后，学校里出现了欣欣向荣的景象，恢复了数论、函数论、几何学和代数学等研究方向的人才培养工作，我们重新划分了专业，大家学习热情很高，努力学习新鲜的内容. 丁先生的讲课水平很高，工作又极其认真负责，每周除了两次课以外，还到我们宿舍来辅导和答疑. 这样，我们就和丁先生建立了亲密的师生关系. “近世代数”课是一年的课程，下学期是聂灵召先生给我们讲的“域的扩张”和“赋值论”.

再次见到丁先生则是十多年之后的 1978 年. 历经文革的浩劫和磨难，他成为数学系的负责人，而我也要重返北大跟随吴光磊先生继续学习. 我到他在蔚秀园的宿舍去看望他，这是与他人合住的一个单元房.

在 1977 年之后，丁先生作为数学系的一位主要负责人，在恢复教学、科研的正常秩序的过程中起到拨乱反正、中流砥柱的作用. 我作为在 1980 年年底留校工作的教师，对于当时系里的状况不可能有清楚的了解，但是从几个侧面已经可以感受到丁先生的工作所产生的一些新气象. 那年过年时，恰逢丁先生和聂先生同时搬家到中关园宿舍，他组织几何代数教研室的年轻老师各自准备一个菜，在他家里举办了一次聚会，热热闹闹、红红火火地过了一个年，这对于消除教员之间在文革期间产生的隔阂起到十分良好的作用. 另外，当时为了加强科研工作成立了北京大学数学研究所，规定了几项至今仍在执行的制度，这里都有丁先生的贡献. 比如，学术休假制度和研究所成员的轮换制度. 数学系教员在 4 年教学之后可以享受一年的学术休假，利用这一年可以去国外访问，或到研究所工作. 这样既能保障有足够的师资教课，又使教员能够集中精力进修和提高，做科研和必要的学术储备. 还有，系里建立了每周的学术报告会的制度，每周在固定时间有一个学术报告，要求教员和研究生参加，进行交流. 丁先生还亲力而为. 他有一次在报告会上介绍了“公开密钥”问题，这是计算机广泛应用所面对的极其重要的问题. 当时，一院的会议室挤满了来听报告的教员. 我关于公开密钥的知识就是从他的报告中获得的. 他还提倡跨学科的讨论班. 我记得在彭立中主持的一个讨论班上要我介绍微分几何的发展和现状，丁先生也亲自出席.

丁先生在哈佛大学访问期间于 1983 年 10 月之后获知正在被考虑担任北大校长的职务. 12 月，他结束在哈佛大学的进修访问，路过加州伯克利回国. 海外的朋友们都认为丁先生担任北大校长说明国内知识分子地位的提高，陈省身先生和项武义、伍鸿熙等都对他抱有极大的期

望. 当时，我也正好在伯克利加州大学做访问学者，目睹此场景，并且有幸聆听丁先生在聊天时讲述他在上海念大学时参加学生运动和被捕的情形，还了解到那时丁先生还是一个佛教徒、在解放之后才入党的情况. 在大家与丁先生交谈中了解到，鉴于北京大学还处于百废待兴的状态，抓好后勤管理工作是当务之急. 事实上，在丁先生上任之后，调派了得力干部在学校食堂内部引进竞争机制，很快使北大的食堂成为北京高校的模范，消除了隐藏在学生中一个的严重的不稳定因素.

在 80 年代初，全国和北大的左的思潮还十分严重，改革开放每走一步都会遇到阻力. 在这种情况下，北大在体制、职称评定上开始了很多成功的改革尝试. 比如，学校把经济系扩充成为经济学院，设立新的经济管理系，成立管理科学中心. 为顶住各方面的压力，破格提拔年轻的教员，他自任管理科学中心主任直到 90 年代北大成立光华经济管理学院为止. 回头来看，当时的决策对于我国经济转型在人才培养、理论储备方面起到十分积极的作用，而丁先生任中心主任的做法体现了他高超的领导艺术. 在丁先生担任北大校长的五年多时间里，正是我国改革开放的关键时期，也是学生思潮风起云涌的时期，这把丁先生推到了一个十分微妙的位置上. 然而，丁先生始终坚持爱护学生积极性的立场. 在 1989 年六四政治风波之前，丁先生正在美国访问. 他在夏威夷发表的讲话肯定了学生运动的初衷，着实使我们大家捏了一把汗. 在 6 月 3 日，看到丁先生回到北京、亲自主持授予美籍华人数学家樊畿先生北京大学荣誉教授的仪式，我们都稍稍松了一口气. 在六四政治风波之后的暑假里，教育部批准了丁先生辞去北大校长职务的辞呈. 在 1990 年暑假，美国数学会将在洛杉矶加州大学举办以微分几何为主题、为期一个月的暑期学校，同时要为陈省身先生的 80 寿辰举行庆典. 海外的朋友，包括陈省身先生在内，担心丁先生在国内的处境，希望他能借此机会到美国访问. 为此事，我特别去看望了丁先生，他要我转告陈先生，他的处境很安全，出国也没有障碍，但是他认为最近这个时期还是留在国内比较好. 所以，他没有出席这次活动. 直到 1991 年，丁先生才接受陈省身先生和 Griffiths 教授的邀请，分别访问伯克利的美国数学科学研究所和普林斯顿高等研究院.

丁先生自担任民盟中央主席和人大常委会副委员长之后，政务繁忙，但是一直心系北大和数学学院. 比如，为了迎接北大数学系的 80 年庆，丁先生是撰写北大数学系简史的当仁不让的最佳人选，最后以他为主，在袁向东和张祖贵协助下完成了《北京大学数学系 80 年》. 在数学系的 90 年庆和百年庆的活动中，丁先生也贡献了很多力量.

2001 年是我的导师吴光磊先生诞辰 80 周年和去世 10 周年，我们作为吴先生的学生策划举办纪念吴先生的座谈会和出版纪念文集. 我把此事和丁先生一说，他就非常高兴地表示一定要参加这个会. 吴先生是民盟盟员，在 1958 年下放到北京门头沟斋堂时，丁先生是领队，并且和吴先生睡在一个炕上，与吴先生有深厚的友谊. 丁先生的热情讲话叙述了吴先生的很多事迹.

2008 年是我们数学力学系数学专业和计算数学专业 58 级同学入学 50 周年，我们组织了

一次校友返校活动，大家都希望能请丁先生来参加聚会. 我把此事告诉丁先生，他马上答应，并且在聚会上讲了很多鼓励的话，同学们都以亲自听到丁先生的讲话感到荣幸，会后纷纷与他握手问候，一起合影留念. 在丁先生离开北大到民盟任职之后，我们数学系的一些老师经常会在过年过节时去看望他，他也喜欢看到我们. 在他家里，经常是无拘无束的聊天，我们谈各自经历的趣事，讲系里的动态，也谈到一些社会现象. 他常常静听我们的发言，有时问几句. 我们感觉到，此时大概是丁先生精神比较放松、非常愉快的时光.

丁石孙先生的待人处世是我们的楷模，是我们学习的榜样.

(原文刊载于《丁石孙与中国数学》，该书于 2017 年 12 月由八方文化创作室 (世界科技出版社) 出版)

陈维桓：38 岁，再回北大读硕士

个人简历：陈维桓，1964 年毕业于北京大学数力系数学专业。1980 年 12 月获北京大学数学系硕士学位。1980 年 1 月调入北京大学数学系，历任讲师、副教授、教授、博士研究生导师等职务。主要从事微分几何方面的科研和教学工作。主要的研究方向是子流形微分几何, 包括子流形积分公式、极小曲面、可积系统在微分几何中的应用，等等。在微分几何教材建设方面有突出贡献。

1978 年高校恢复研究生招生，陈维桓重新报考吴光磊的研究生，通过入学的方式重新回到北大。此时，距他进入北大数学系读本科已经过去 20 年了。

1958 年，18 岁的陈维桓进入北京大学数学力学系学习。这实在是一个微妙的时间点，幸运的是此时进入北大，让他能在时代的风暴来临之前完成了六年制的本科数学课程，不幸的是，当他真正找到自己的数学研究兴趣，要开始进一步的研究性学习时，过于喧闹的校园已经“容不下一张平静的书桌”了。

1958—1968 年，对陈维桓来说，是复杂的十年。他在北大学习了专业知识，收获了良师益友，但是也“经历了十年的动荡和折腾，在专业学习上浪费的时间难以计算，回报人民培养的抱负没有机会实现”。

陈维桓入学时正赶上“大跃进”，在当时热火朝天的氛围下，在校的学生要参与劳动。陈维桓至今还记得跟同学们在北大南门外的沟渠里翻地、去西山拉矿石炼钢、在西山植树打防火道、为北大 200 号修铁路等情景。类似的事务性活动占用了大量的时间和精力，让人很难静下心去读书。

1962 年广州会议之后，知识界迎来短暂的春天，数学系的一些导师得以开设专门化小班，拓扑、数论、函数论、代数、微分几何等抽象数学研究方向重新设立，学生可以重新选择专业，陈维桓选择跟随吴光磊教授学习微分几何。重新找到方向的陈维桓在学习中渐入佳境，“总算知道书该怎么念了”。陈维桓上课十分认真，但是他也坦言：“有些课在第一遍学的时候会有一种混沌的状态。”老师们课都讲的很好，但当时没有什么教材，老师们讲课都是自己准备讲义，有些不够系统，同时他不满足于课堂上的知识学习，还想要了解这门课究竟是怎么回事，能干什么事，会主动找一些相关的专业书来读。

“六二年到六四年的求学是相当认真的。”这是陈维桓真正受到教学和科研锻炼的时期，为他今后的发展打好了基础。本科毕业后，陈维桓考取了吴光磊先生的研究生，谈到当时为什么要考研究生，他笑言：“我也不懂，当时只是一个梦想，觉得这个课很好，我还没学到手，想继续学。”可惜好景不长，研究生读了一年，1965 年秋天就被派到农村搞四清去了，一年后回到学校，再见到吴光磊先生时，陈维桓的第一句话就是：“我把微分几何全都忘记了”。

1968—1978 年，对陈维桓的数学学习来说，几乎是停滞的十年。在 1968 年工宣队进入北大之前，陈维桓被分配到天津教中学。1971 年他去拜访导师吴光磊，向老师表达了想要继续学习的愿望。“自己的专业不能丢，要继续学好知识，以备国家召唤。”他从老师那里借来几本专业书，尽管白天要工作 12 小时以上，晚上还挑灯念书，即使后来唐山大地震时期，住在防震棚里时，他都没有懈怠，“我是不管有多困，还要自己念书，一定要把知识补回来。”

1972 年中美关系缓和，数学大师陈省身访问北京，中国的基础数学研究有复苏的苗头。吴光磊是陈省身在西南联大任教时的学生，是在国内仅有的一位直接跟随陈省身做大范围微分几何研究、并有成就的几何学家，两人时有通信往来。陈维桓从吴光磊处得知消息后，时常请假去北京听课，并且通过老师获得中科院数学所印发的油印讲义自学。

“四人帮”倒台后，全国各行各业面临着复苏的局面，急需人才，吴光磊在给陈维桓的信中提到：“段学复先生（数学系主任）很关心你，曾两次同我谈起你，希望你能调一下工作，正尽力争取。”陈维桓本人也希望能早日归队，从事微分几何教学和研究工作。但混乱的局面一时难以整顿，调动工作难度极大，只能借助重新入学来调动。

陈维桓重返北大时已经 38 岁了，他调侃当时的自己是“老成少年”，年纪颇大，而学无成就。想当初，满怀热情进入北大，能平静读书的日子却不多，之后又耽误了太长时间。但对数学的热情和想要学有所成报效国家的初心却不曾改变，心中始终有一簇火苗支持着他在幽暗的岁月里砥砺前行，待到拨云见日的时候，重返数学的殿堂。

陈维桓有感于时不我待，迫切地学习吸收新知识，他数学功底扎实，但是作为一名数学领域的工作者，最富有创造性和开创性的时刻基本已经过去了，空负热血和激情，精力却被消耗在许多无意义的杂事中。但他没有心灰意冷，而是以积极的态度对待学习和研究工作。

新时期的中国整个国家都在急切地“补课”，对外学术交流十分频繁。1980 年春，陈省身在北大开设微分几何课程，陈维桓作为助教记录讲课内容，之后在陈省身、吴光磊的指导下，花费了大量精力将讲课内容整理出版，这本《微分几何讲义》对当时中国数学界的影响巨大，后来多次再版，成为微分几何领域的经典教材。

陈维桓 1980 年底留校任教，1983 年赴美国伯克利加州大学访问，1984 年秋季以后，成为北大数学系微分几何课程教学的实际主持人。1985 年陈省身创办南开数学研究所，提倡每年举办某个主题的学术年，陈维桓成为南开数学所许多工作的积极参与者，并成为 1986 年“几何拓扑年”、1994 年“微分几何年”的主讲教师。

在 20 世纪九十年代，清华的微分几何课程没有合适的教师，陈维桓亦被邀请去清华讲课，一人身兼三校。在人才青黄不接的时刻，陈维桓担负起我国微分几何领域教学的重任，继往开来，为重新打开数学的教学和研究局面作出了重大的贡献，培养的学生也成为出色的数学工作者。

(此文由北京大学新闻网学生记者程琰撰写，刊登于 2019 年 9 月北京大学党委宣传部编辑的《北大记忆：70 位北大人的故事》)

回忆在北大六十年

大约在 2008 年前后，有一次我在课堂上对同学们不经意地说起自己的学习经验时，提到“半个世纪前，我在北大如何如何”。回到家后，我自己都被我在课堂上的说法吓了一大跳，以前总以为一个世纪是一段很长的时间，而我却不知不觉地已经在北大呆了半个多世纪了。

我是在 1958 年 9 月进入北大数学力学系学习的。当时，我自己对北大的感觉是很朦胧的。一方面，在中学的时候知道北大数学系有一些著名的教授，如江泽涵、闵嗣鹤和段学复，等等。另一方面，在中学经历了反右，批判了成名成家思想，到大学之后抱着低调处世的态度。正好，在进校之后，马上投入的是大跃进，从事大炼钢铁、深翻土地的劳动。接着，展开所谓教育改革的大辩论，进行超声波应用的所谓科研活动，打磨风洞壁的劳动，等等。在第一学期，真正开始念书是在 12 月份，由江泽涵教授给我们上了一周的“解析几何”课。他的授课方式是所谓的“抛纲式教学”，用一周的时间每天提纲携领地讲一次课。实际上，讲课内容是三维空间的向量代数。后来，我认识到，这确实是解析几何的核心和精华。从 1959 年开始，教学工作逐渐步入正轨。数学分析课由闵先生担纲，用无限不循环小数引进无理数，展开实数理论。由此可见，尽管在我们入学的时候，经历了一段“折腾”的时光，但是北大的传统还是体现出来了，由最著名的数学家给我们开设基础课程，使我们受益匪浅。

回顾我在北大的六十多年间，北大的数学系沧桑剧变，以改革开放的 1978 年为界，大体上分为两个时期。在 1978 年之前，北大和全国一样，政治运动不断，间以工厂和农村的劳动，贯彻“教育为无产阶级政治服务，教育与生产劳动相结合”的方针。我自己在 1964 年本科毕业 (北大仅有的三届六年制之一)，随后读研究生，下乡搞四清，最后遇到折腾的顶峰“文化大革命”。我在 1968 年工宣队进北大之前、两派武斗的环境中离开北大，分配到天津教中学，然后到 1978 年重新回到北大读研究生，再在 1980 年留校任教至今。

在 1978 年之后，我国的科学文化教育事业迎来了改革开放的春天，北大进入了新的发展时期。我们每个人都加倍珍视这难得的机遇，争分夺秒抢时间，决心要把至少是文革所损失的十年光阴补回来。回想起来，在 1978 年之后的头十几年时间里，我们每个人的工作量都是超负荷的，终于改变了教育科研事业百废待兴、人材青黄不接的局面，为北大的蓬勃发展打下了坚实的基础。现在的北大数学学院人才济济，所培养的学生，如许晨阳，恽之玮，张伟，朱歆文，等等那么年轻的学子，盛名于国际数学界，我们可以自豪地说:“我教过他们! ”

我在北大学习、工作的六十年间，经历的事情很多，值得回忆的事情也很多。在这里只说几件和我直接有关的事情。

1. 我的研究生导师吴光磊教授

吴光磊教授是我国整体微分几何专家，他早年曾就读于昆明的西南联合大学，是陈省身先

生在昆明教过的学生。但是，他走上微分几何研究的道路，是他追随陈省身先生的研究方向坚持不懈地努力的结果。他在 1962 年完成了重要的论文"示性式的超渡"，给出了在相配纤维丛中建立超渡式的一般公式，推广了陈省身关于示性类的工作，在当时是国际上领先的成果。可惜的是，由于国内政治运动不断，先是四清，又是文革，再加上我们国家在国际学术界的孤立地位，吴先生的这项工作直到 1976 年才用中文发表。更为坎坷的是，自从 1958 年以来，吴先生一直是系里拔白旗的对象，在那一年下放到北京西郊门头沟的斋堂村劳动，"为了照顾他"，让他担任村里"一人校"小学的校长，全校就他一位老师，什么课都由他教。由于他在北京大学的教课十分精彩，受到学生的普遍欢迎，据说"拔白旗"是因为他教课教得好，要消除他"资产阶级知识分子的影响"。这种情况到 1961 年有所改变，党中央调整了关于知识分子的政策，基础学科的研究恢复了，在北京大学已经停办的数论、代数、几何、拓扑、函数论等研究方向，开始培养学生。在 1963 年，吴先生成为北京大学数学系当时第一位没有国外留学背景的、最年轻的教授。

1962 年，我们 58 级的四位同学 (陈维桓，董玺印，张宜金和马希华) 进入吴光磊教授主持的微分几何专门化学习。吴先生给我们讲授黎曼几何、外微分法和活动标架、联络论。原来，北京大学的几何组还有吴祖基、裘光明先生，在 1958 年前支援了郑州大学等学校，到北京大学恢复微分几何专门化时，除了吴光磊先生外，只有田畴和章学诚两位老师作为助手。吴先生的课把我们带到了一个新的境界，微分流形的概念十分新颖，尤其是"切向量"的概念。另外，活动标架及其相对分量不再是抽象的，而是能够直接进行计算的，消除了 E.Cartan 经典著作中的神秘感。进入毕业论文阶段，我们第一次去吴先生在中关园的住所，看到他狭小的书房里满墙到顶的书架上的浩瀚藏书，感到特别震撼。吴先生亲自指导我，指定的是陈省身先生的重要论文"On integral geometry in Klein spaces"，以及王宪钟先生的论文"Differential geometry in symplectic space I"，还有 L. Santalo 的专著《积分几何学引论》(俄文版)，目标是将陈先生关于齐性空间积分几何的一般理论用于具体的辛空间。这是一个很好的科研训练，主要是学习如何寻找资料，如何阅读文献，如何撰写论文等等初步的研究工作能力。在我们完成毕业论文之后，吴先生认真、仔细地逐字逐句地进行修改。

1964 年，我跟随吴先生读研究生。他给我制定的学习计划是联络论，主要参考书是 K. Nomizu 的《Lie Group and Differential Geometry》(这本书是后来出版的经典著作 S. Kobayashi 和 K. Nomizu 的《Foundations of Differential Geometry》的前身)，主要内容是主纤维丛上的联络，以及和乐群与和乐定理。实际上，真正能够念书的只有两个学期，其间还有两个月的工厂劳动。接着在 1965 年秋天我们下乡参加四清，回到学校，已经是 1966 年的 5 月份了。我见到吴先生的第一句话是"我把微分几何全都忘记了"。随后就是"一张大字报"开始的文化大革命，学习被迫中断，最后我作为"修正主义苗子"在 1968 年分配到天津 35 中任教。由此可见，我在北大经历了十年的动荡和折腾，在专业学习上浪费的时间难以计算，回报人民培养的抱负没有机会实现。

再次见到吴先生应该是在 1971 年的春节。我从天津回北京探亲，同时去看望吴先生。那时吴先生刚从江西鲤鱼洲回来，染有血吸虫病，家里的房子也被隔去一部分，保姆也辞退了，但是他的精神不错。我向他汇报了过去几年的状况，表达了我打算继续学习的愿望。从吴先生那里，我借来了 L. P. Eisenhart 的《Riemannian Geometry》，重新开始系统地学习微分几何学。

1972 年，陈省身先生在中美关系改善后第一次访问北京，他为复兴中国数学做出的努力，给深陷文革漩涡的中国科学界带来一股清新的空气。由于中国数学界已经远远地落后于国际数学发展的水平，特别是整体微分几何已经成为几何学发展的主流，所以陈先生建议中国科学院数学研究所举办讨论班，学习拓扑学和微分几何学，由吴文俊、张素诚和吴光磊三位教授主讲。吴光磊先生讲微分几何，参考书是陈省身先生亲自指定的 Hicks 的《Notes on Differential Geometry》，中国科学院数学研究所把它刻成蜡版印刷。吴光磊先生告诉了我这些消息，并且为我要了一份讲义。这本书成为我在 1974 年以后的主要学习材料。

吴光磊先生在文革后期为我国基础数学研究的复兴至少做了两个重要的贡献：一件就是在中科院数学所的讨论班上主讲微分几何，另一件是以"舒立"为名义的北京大学数学系 20 多位教师组成的编写组撰写的"微积分的理论是从哪里来的？"发表在《红旗》杂志上，其中吴光磊先生实际上起到指导的作用。在当时十分严峻的形势下，该文通过微积分产生的历史说明理论的重要性和数学家的作用，是十分难得的，而且为恢复我国基础理论研究发出强有力的声音。

在文革后期，吴先生和我保持了密切的联系，我每学期都要去看望吴先生，争取他的指导，并且保持着通信联系。我保存着吴先生先后给我的五封信。前两封是谈及如何进一步学习的建议，提到"整体微分几何是研究局部与整体的关系，例如曲率与 Betti 数的关系，因此需要一些基本的拓扑知识，主要是与微分流形有关的一些基本概念"。另一封信给我寄来他的"示性式的超渡"的抽印本，说"前两节是关于联络论的提纲，你可参考一下"。他在信中还提到"段学复先生 (数学系主任) 很关心你，曾两次同我谈起你，希望你能调一下工作，正尽力争取"。

在四人帮被打倒之后，全国各行各业面临着复苏的局面，我个人更是渴望早日归队从事微分几何的教学和研究工作，因为我的年龄已经不小了，耽误的时间够长的了。吴先生充分体谅我的这种状况，在来信中鼓励我，并且一方面对前景表示乐观，有信心克服困难，在另一方面又估计到阻力极大，要我"必须等一等，暂时不要着急"。他在信中说"过去是毫无办法。现在四人帮倒了，情况完全不同了；一切大有希望。但是我逐渐认识到，我们对四人帮的破坏，特别是在教育上，估计是远远不足的。⋯恐怕得等到十一大开过，整党过后，会有大变。⋯在这点上我是很乐观的。⋯总之，八亿大国，十分复杂，情势大好；问题一定会解决的，不必过虑"。最后，1977 年，全国恢复高考；1978 年，开始研究生招生。考虑到我们这批人年龄大、又在极端复杂的情势下极待解决归队的问题，教育部在北大的提议下，放宽了招收研究生的年龄限制，采取变通的办法，使我能够顺利地回到北大在吴先生身边工作。

在 1976 年到 1977 年，吴先生为所患的腮腺癌动了两次手术。在这种情况下，1978 年秋

天他接受李安民和我作为他的研究生。尽管他身体状况不很好，但是精神状态非常好，有“准备大干一场”的打算。我在 1980 年完成学位论文，留校工作，参加了 1980 年秋天在北京举办的“双微”会议，在会上宣读了我的学位论文。李安民在 1981 年完成学位论文，提交给 1981 年在上海举行的第二届“双微”会议。吴先生一直很关心李安民的研究工作，为他取得的成就感到欣慰，支持他继续深造。后来，吴先生继续培养研究生，其中有博士生吴传喜，和硕士生白东强、康庆、邓辉、秦兵和张春晖，直到 1991 年春天吴先生因癌症复发不幸去世。吴光磊先生一生坎坷，但是成就非凡。在 2001 年我们召开了纪念他逝世十周年的追思会。纪念文集的书名《魂系数学，坚韧无悔》正是他为数学教育事业献身的精神写照。

2．陈省身先生和《微分几何讲义》

陈省身先生是国际上著名的几何学家，早年在南开大学、清华大学接受教育，后来在德国汉堡获得博士学位，在法国巴黎跟随 E. Cartan 做博士后。回国后在昆明的西南联合大学任教授。1942 年访问美国 Princeton 的 Institute for Advanced Study，完成了划时代的工作“闭黎曼流形的 Gauss-Bonnet 定理的内蕴证明”，建立了陈示性类的理论。1946 年任清华大学教授，并且在上海主持中央研究院数学研究所。全国解放前夕赴美，先后在芝加哥大学和伯克利加州大学任教授，把伯克利加州大学数学系建设成为盛名国际的几何中心。但是，他一直注视着国内数学研究事业的发展。明显的例证是，在吴光磊先生去世后，我整理他的藏书和文件，发现他收藏有陈先生的几乎全部论文抽印本。而陈先生的论文选集直到 1979 年才正式出版，在中美关系冻结、交流中断的情况下，陈先生能够接续不断地把抽印本寄给吴先生，说明他对国内数学发展的热切期望。

在中美关系解冻后，陈省身先生联络了多位杰出的华人学者，迫不及待地与中国科学界建立联系。从 1972 年开始，陈先生几乎每年都要回国讲学，并且提议举办前面提到的中科院数学所的几何拓扑讨论班，开始培养我国数学研究的生力军。

在打倒“四人帮”之后，陈先生为中国数学的复兴制定了蓝图，提出了很多中肯的建议。1978 年，他来中科院数学所讲了十个专题，留下了《活动标架法》讲义。在他建议下，1980 年举办了两个重要的活动：一是在春天，他亲自在北京大学开设“微分几何”课，普及整体微分几何的基础理论；另一个是秋天，在北京举办“双微”会议。这两个活动是中国现代数学复兴的开端。

“微分几何”课是以北京大学数学系和中科院数学所的名义，向全国数学界发出的邀请，面向全国数学研究生，同时吸引全国数学工作者参加。课程开始前，在北大开了一个预备会，参加者有段学复、江泽涵、吴光磊等教授，还有章学诚、尤承业、李安民和我等一些年轻的同志。我们对陈先生很熟悉，多次聆听过他的演讲，读过他的很多论文。但是面对面的交流还是第一次。他平易近人、坦诚务实的态度使我们很感动。他提议，讲课不要听听就算了，而是在课后要进行考试，成绩优秀者可以获得他带来的若干本几何原著的奖励。这种模式为后来举办的各种数学讲习班所采取。在预备会上成立了辅导组，成员有：章学诚、尤承业、刘旺金、韩念国、

周作领、刘应明、孙振祖、李安民和我，由我、李安民和章学诚负责记录，及时刻蜡版印成讲义发给大家（当时北大数学系还没有复印机）。江先生还提议，陈先生的讲课内容最后要成书在北京大学出版社出版。陈先生接受这个提议，并且责成我做此事。陈先生的课十分成功，他亲自出题考试，张筑生等三位同学获得了奖励。

按照陈先生的提议，1980 年 10 月的"双微"会议分两部分：一方面是以陈先生的崇高威望邀请国际上顶级的专家作系统的演讲，他们是 M. F. Atiyah, M. Berger, I.M. Singer, R.Bott, P.D. Lax, J. Nirenberg, S. Hildebrandt 等 20 多位学者，并且留下了他们宝贵的讲稿。他们带来了最新的知识和课题，并且与中国数学家建立了联系。"双微"会议成为中国数学界最高端的讲习班。另一方面由国内学者宣读论文，获得实践和锻炼的机会。后来，多年在各地按这种模式举办过"双微"会议，每年一次，为提升我国的数学研究水平起到引领作用。

在"微分几何"课后，整理陈先生的讲课内容成为我的主要工作。因为在 1980 年秋天，陈先生还要来北京，于是我在吴光磊先生的指导下，拟订了全书的纲要，试写了第一章，准备当面向陈先生请教。陈先生的课高屋建瓴、清晰扼要，在完善成书时需要补充很多细节。好在有陈先生的著作《Differentiable Manifolds》（芝加哥大学油印讲义）和《Complex Manifolds without Potential Theory》做参考，还有吴先生的指导和把关。比如，在讲外微分运算时，吴先生指出外微分运算的局部性很重要，即外微分运算是作用在外微分式上的算子，如果两个外微分式在一个邻域上是相同的，则它们的外微分在该邻域上也是相同的。大范围定义的对象只有在具有局部性时才能化到局部坐标系下来进行计算。这是微分流形论的要义。

在 1980-1981 年间，我和陈先生有密切的通信联系。我每完成一章，就把初稿给陈先生寄去。尽管他工作繁忙，接到我的初稿后他必定认真阅读，并且把意见及时反馈给我。有一次，他觉得我用单位分解定理证明联络的存在性有疑问，于是我把计算过程详细地写出来给他看，获得他的首肯。该书由他亲自命名为《微分几何讲义》，1983 年 12 月在北京大学出版社出版。后来，1990 年在台湾出版繁体字版，1991 年在新加坡出版英文版。在 2001 年，陈先生又亲自撰写了第八章 Finsler 几何，在北京大学出版社出版了第二版。至今，这本书已经印了 5 万多册。

陈先生对中国数学的发展还有很多提议。比如，1984 年为了提高国内研究生的教学水平，邀请杰出的华人数学家，如项武义、伍鸿熙、萧荫堂、丘成桐等来讲学，在北京大学举办全国数学研究生暑期教学中心。以后，这个活动在各个大学轮流举办，并且逐渐转变为以国内专家、学者为主讲教师，成为全国数学研究生暑期学校。还有，为让最优秀中国学生到美国最好的数学家那里去学习，尽快地进入数学研究的前沿，创立了所谓的"陈省身项目"，从 1983 年开始，每年由美国数学会派出著名数学家，如 R. Bryant, P.A. Griffiths 等，到北京大学来为去美国留学的中国学生直接进行面试。

在 1985 年陈省身先生创办南开数学研究所之后，提倡每年举办某个主题的学术年，面向全国的数学研究生，第一个学期选定适当的研究生课程，请国内专家讲课，第二个学期请著名

的国外专家来讲学，介绍国际上数学研究的最新进展，最后举行相关的学术会议。比如，1986 年为“几何拓扑年”，1994 年为“微分几何年”，我有幸作为这两个学术年的主讲教师，并且在微分几何年协助陈先生做一些组织工作。这些学术活动切切实实地提高了我国培养数学研究生的水平，我们这些年轻的学者也得到他的提携，在这些活动当中得到锻炼。

直到 2002 年，国际数学家大会在中国召开，标志着中国已经成为数学大国。回顾改革开放以来的四十年，中国的数学教学和研究从文革期间的停滞不前、人才青黄不接到现在相对辉煌的局面，陈省身先生功不可没。他具有全局的眼光，不仅考虑到全国各地的数学发展，而且关注各个数学学科的成长和进步，他是中国现代数学事业的设计师和领路人。

3．数学学院图书馆

在互联网和电脑普及之前，数学图书资料一直是数学研究最重要的资源。在现代数学引进我国的早期，姜立夫先生（姜伯驹院士的父亲）就特别关注购买、收集图书资料。后来，江泽涵教授、段学复教授作为系主任都亲自分管数学图书、杂志的采购工作，成为传统，所以北京大学的数学藏书一直很丰富，收藏的数学期刊也十分齐全。

在上世纪八十年代后期，时任北大数学系副主任、分管图书采购工作的叶其孝教授调离北大，所以系里把这项工作交给我，指派我为系图书小组组长，同时兼管系资料室的工作。

在我上学的时候，北大图书馆设有专门的数学图书馆，地点在北阁，馆员是夏蔚霞先生（中文系王力教授夫人）和张崇静先生（力学系王仁教授夫人）。1965 年，数学系搬至昌平分校（称为北京大学昌平 200 号），又在文革开始后搬回海淀，数学专业书籍也随着几经变迁，最后与无线电专业书籍等一起落户于新建成的北京大学图书馆的第二阅览室，管理员有张淑兰和张清允。

到 1980 年，数学系资料室只是位于一院的数学系办公楼北边尽头的一个房间，里面收藏着历年留下来的一些油印资料、作为参考书的中文数学图书。我兼管资料室时的管理员是刘玲玲，她调任《数学进展》编辑之后，管理员成为徐玉玲。系资料室的日常工作是每个月展示当月的数学、物理等学科的影印书目供老师们圈阅订购，然后替老师们去书店购买。后来，因保护知识产权，影印书提供得越来越少，最后就停止供应了。

此时，学校图书馆就提供越来越多的进出口公司和国外图书出版社的图书书目。我的工作变成每个月到校图书馆去取图书资料放在资料室，组织老师们圈阅，汇总后送校图书馆采购办公室，经查重后再列入采购计划。另外，到期刊订购时节，和校图书馆协商订哪些重要的数学杂志。在八十年代的时候，学校的图书经费越来越紧张，原版图书的价格每年都在涨，数学书籍的采购遇到极大的危机。最后，学校用于采购数学资料的图书经费，只能订购特别必需的几种数学杂志，甚至于有一年数学原版图书连一本都没有购进。经过张恭庆院士等人的呼吁和努力，才先后从国家教委和国家科委争取到了 50 万元的图书经费，又通过世界银行贷款 30 万美元，解决了燃眉之急，补充了急需的图书和期刊，使数学图书收藏的落后面貌有所改观。这

样，学校图书馆提供少量的经费采购部分数学期刊，大部分数学期刊和图书的采购就由这些专用经费解决。于是，整个采购的流程变成：由校图书馆收集图书出版信息，提供给数学系老师圈定书目，再交给校图书馆采购办公室查重、订购，拿购书发票到数学系财务处开取内部支票，用数学系图书专款报销。在系里，各教研室派出一位老师，组成图书小组，负责书目的圈定；我这个组长除了召集图书小组活动以外，主要就是做校图书馆和数学系（以及后来的数学学院）之间的跑腿、联络的工作。

我对于南开数学所、伯克利加州大学数学系的图书馆十分羡慕，总是梦想有朝一日我们学院也有一个像样的图书馆。到 2000 年，这样的机会来临了，数学学院要搬进理科一号楼，给院图书馆留出了 400 平方米的场地。那时，林艳秋已经在资料室工作，院图书馆的整个设计就由我和林艳秋负责，包括院图书馆内办公区、书籍收藏区、期刊收藏区、阅读区、电脑区等各个功能区域的划分，画出柜台的详细图纸，对所需要的书架、桌椅及其他设备，列出清单，等等。在数学学院搬进新楼之后，林艳秋调任综合办公室，院图书馆就交给刘若泉管理了。

院图书馆虽然作为校图书馆的分馆，在业务上接受校图书馆的领导，但是在人事安排、预算等方面却是属于数学学院权限。要处理好这两者之间的关系，学院安排我、钱敏平和郑忠国与校图书馆戴龙基馆长交涉。经过多次商谈，因为服务的对象和目标是一致的，院图书馆在业务上是校图书馆的组成部分，所以戴馆长很痛快地同意了我们的要求：将校图书馆在 1980 年以后收藏的数学图书转移到院图书馆，新采购的数学图书在编目之后由院图书馆收藏；新数学期刊在院图书馆展示和收藏。考虑到院图书馆的收藏能力有限，在过一定的时间之后，把过刊和超过院图书馆收藏能力的书籍交给校图书馆收藏。图书经费一部分由学校按不低于全校各学院平均水平继续承担，大部分开支由数学学院自筹图书经费支付。采购数学图书的书目由数学学院确定，校图书馆负责购买和编目。

在院图书馆成立之初，校、院图书馆两级在抽调数学图书和目录、搬运数学图书方面工作十分繁重。刘若泉老师在院图书馆这一侧，很好地、敬业地完成了任务，并且在校图书馆的分馆办公室的老师协助下，完成了一次艰苦的查库任务。随后，在校、院两级图书馆之间有正常的、良好的钱、物交流，所以整个系统运转得很好，建立了互相信任的合作关系。值得提一句的是，我接触比较多的采购部负责人朱芝仙老师快退休前，发觉她是我同一个中学（上海市市西中学）的校友，是比我高 6 届的学姐，这种感觉非常奇妙。看到我们亲自设计的院图书馆初具规模，为数学学院的老师和同学提供了安静、方便的工作、学习环境，十分欣慰。

我在北京大学已经度过 60 多个春秋，亲眼看到数学学院天翻地覆的发展和变化，在教学、研究工作和人才培养方面做出了杰出的成就。希望院里年轻的老师和青年学子能够继续发扬数学学院的光荣传统，艰苦奋斗，努力实现中国成为数学强国的梦想。

努力实现陈省身先生的愿望
(纪念陈省身先生诞辰 110 周年)

我们国家的数学已经有长足的进步，自 2002 年在我国举办国际数学家大会之后，我国的数学家频频在国际数学家大会上作一小时报告，或者是 45 分钟报告。回想起半个世纪之前，由于“文革”，我国的数学研究停顿，面临人才严重断档的局面。这四十多年来，中国数学的复兴，离不开陈省身先生的策划、引领和倡导。

陈先生是蜚声国际的几何学家。尽管在新中国成立前夕移居美国，但是他对我国数学发展的关注从来没有停止过。我的老师吴光磊是陈先生在昆明西南联大的学生。吴先生 1991 年去世后，我在整理先生的书籍时发现他收藏有陈先生的几乎全部的抽印本。在一个时期，我国与西方国家的学术交流处于停顿的状态下，这些抽印本都是陈先生寄给吴先生的。吴先生在陈先生的文集出版 (1978 年) 之前就拥有这些资料是难能可贵的。

1972 年 9 月，陈先生偕夫人和女儿回国访问，并且在中国科学院数学研究所作演讲。意识到国内数学界与国际数学研究状况脱节的实际，他建议阅读 Hicks 的《Lecture Notes on Differential Geometry》(希克斯《微分几何讲义》)。为此，数学研究所刻印了该讲义，并且组织了讲习班，由吴文俊、吴光磊和张素诚三位教授讲授拓扑学和微分几何。当时我在天津教中学，没有办法参加讲习班，但是有幸通过吴先生获得了这份讲义，成为我在文革后期的主要学习材料，为后来把陈先生在北大开设微分几何课的记录稿整理成书做了准备。这个讲习班是中国数学复兴的开始，“文革”后新一代数学工作者大体上是从这里起步的。

我对陈先生的大名早就熟悉了，并且读过他的一些文章。早在 1963 年，吴先生给我们讲流形论、活动标架和外微分法，就是遵循陈先生在芝加哥大学的著名油印讲义《微分流形》的脉络。我第一次领略陈先生的风采是在 1974 年，他在中国科学院数学研究所的演讲。第一次和陈先生的近距离接触，则是在 1980 年春天，他在北京大学开设“微分几何”课的时候。开课前，北大数学系把陈先生请来和系里的老师、同学见面，出席的有江泽涵、吴光磊等教授，还有李安民和我等年轻的同志。在见面会上，陈先生提出在课后要进行考试，江先生提议把课程笔记整理后正式出版，获得了陈先生的首肯。在会上确定了课程辅导员的人选，并且指定我、李安民和章学诚老师做笔记，负责印发讲义给听课的学员。陈先生的微分几何课是十分成功的，听课的学员包括全国各地的在读研究生，以及在国内的许多数学工作者，挤满了当时北大拥有二百多个座位的最大阶梯教室，大大地提升了国内数学研究生培养的教学水平。

接着在 1980 年的 8 月到 9 月，召开了陈先生提议的“国际微分几何与微分方程会议”。这次会议会程之长是超乎寻常的，实际上是为我国数学工作者赶上世界数学发展而开设的一个非常重要的高级讲习班。陈先生借助于他在国际数学界的威望，邀请到了国际上多位最顶级的数

学家来会上作了系统的讲演，介绍数学研究的前沿课题，目的是让国内的数学工作者尽快地熟悉国际数学界的现状，并且建立国内外数学家的联系。这种“讲习班 + 学术交流”成为后来连续几届的“双微会议”的模式，也是后来南开数学研究所举办“学术年”的模式。不过，首届双微会议邀请到的著名数学家的人数最多，级别也最高。

在陈先生的微分几何课之后，我最重要的任务是把课上的内容整理、加工成书。做这项工作的优势在于，除了陈先生的讲课笔记以外，还有他的众多著作可以学习和参考，例如前面提到的他在芝加哥大学的油印讲义，以及他的专著《Complex Manifolds Without Potential Theory》（《无势复流形》）。另外，我在吴光磊先生身边，随时可以请教，并且在形成初稿之后可以首先请吴先生审读。在往后的两年里，是我和陈先生通信联系最密切的时期。首先在双微会议之前，我和吴先生初步拟定了书的目录，然后试写了第一章，请陈先生审查。后来，我每写完一章，就给陈先生寄去，陈先生在读完之后再寄还给我，并且提出他的意见供我修改。我在写作的时候，心里想的是，最基本的命题应该有严格的证明，而且在书内应该有相应的应用。比如，单位分解定理是在微分流形上构造大范围定义的对象的重要工具，我很在意它的应用。另外，流形上的联络是比度量更为基本的概念 (相对地，我们知道仿射空间比欧氏空间更基本，即平行的概念不需要有度量)。因此，我准备在讲联络时，直接用单位分解定理证明流形上联络的存在性，而不通过流形上的度量去构造联络。给我印象深刻的是，我把这部分书稿寄给陈先生之后，他认为这个证明需要核实一下，于是我把联络的整个构造过程，以及验证所构造的对象确实是联络，详细地写出来，得到了陈先生的肯定。

我在 1983 年 9 月到伯克利加州大学进修。10 月北京大学代理党委书记项子明先生访问美国，在他路过旧金山时，陈先生请他到家里做客，同时邀请我作陪。这是我第一次到访陈先生在埃塞利托（El Cerrito）的家，往窗外望去，正好面对美丽的旧金山天际线和典雅、雄伟的金门大桥。在这里陈先生交给我刚刚寄给他的《微分几何讲义》的清样，要我做印刷前的最后一遍校对。

在陈先生的倡议下，为了提高国内研究生的教学水平，决定 1984 年在北大举办面向全国数学研究生的暑期教学中心，历时一个月，邀请著名的华人数学家项武义、伍鸿熙、萧荫堂等来讲课。这个项目后来一直延续到现在，成为数学研究生暑期学校，由若干个大学轮流举办。同时，陈先生已经决定把他的万余册藏书捐赠给南开数学研究所。于是，我和以李克正为首的几个留学生一起到陈先生的家里，把要捐赠的书籍装箱，然后由项武义先生亲自开车送到奥克兰（Oakland）码头海运回国。那一天，陈师母给我们做了非常美味可口的老北京炸酱面，让我们美美地享受了一番。

陈先生的再一个倡议是在南开数学研究所举办学术年。南开数学研究所的办所宗旨就是“立足南开，面向全国，放眼世界”，从 1985 年开始，南开数学研究所每年选定一个主题，用一个学期邀请有关专家来讲课，并且吸收全国各地的数学研究生来参加，第二个学期则计划召开一个国际数学学术会议，邀请国际上著名的专家来讲学并交流。陈先生特别强调要鼓励和培养

国内专家，所以第一个学期要以国内专家讲课为主。这样的效果非常显著，国内的数学很快有了长足的进步。在陈先生生前，几何方面的学术年共举办了两次，一次是 1986—1987 年的第二届学术年，主题是“几何与拓扑”；另一次是 1995—1996 年，主题是“微分几何”。在微分几何年，陈先生和我们商量，把主要的研究方向确定为：子流形几何，外微分系统和 Finsler 几何。Finsler 几何是陈先生晚年提倡的课题，其中有他早在 1948 年所定义的“Chern 联络”。国内关于 Finsler 几何的系统研究就是从那时开始的，现在已经形成有相当规模的研究团队，取得了可观的成果。1996 年春天，有很多著名的数学家来南开看望陈先生，使得该年的微分几何学术会议成为盛大的节日。

1990 年 7 月，美国数学会在洛杉矶加州大学举办以微分几何为主题的暑期学校 (Summer School)，由丘成桐主持。在第一周的周六举办了祝贺陈省身先生诞辰 80 周年的庆祝会，会上，很多国际著名的几何学家纷纷登台致辞，并且讲述认识陈先生、并且得到他的帮助的生动故事。出席这一次暑期学校的一个引人注目的群体是中国留学生。改革开放后十年间，从国内派出的学生，特别是通过“陈省身项目”选拔到美国学习数学的学生，这时已经有一大批获得了博士学位，并且取得了许多美国著名大学的教职，或者读博士后，或者准备回国任教。

在此之后，陈先生经常强调，要立足于国内培养人才，要在二十一世纪把中国建设成一个数学大国，进而成为数学强国。这也是后来在南开两次举行“中国数学二十一世纪展望学术会议”，以及提议、争取并实施在中国举办国际数学家大会的初衷。我有幸在陈先生身边参加了许多学术活动，受益匪浅，并且亲眼目睹了我们国家在数学方面从“百科凋敝、人才断档”到“欣欣向荣、杰出数学人才不断涌现”的过程。所谓的“陈省身猜想”，即要在二十一世纪把中国建设成为一个数学强国的愿望，一定能够实现。

(原文发表在 2021 年 12 月 10 日天津日报副刊)

陈维桓的出版物目录

一. 论文:

1.Some integral formulas on submanifolds in Euclidean space, in: Proc. of the 1980 Beijing D.D. symposium, 3(1982), 1127-1140.

2. 一类广义的调和映射，北京大学学报（自然科学版），一九八三年第 1 期, 11-21.

3.(与吴光磊合作) 欧氏空间中隐没子流形的中曲率向量场，数学进展，第 13 卷，第 1 期（1984 年 1 月），54-60.

4. 如何画曲面的立体图，数学通报，1986 年第 11 期，42-45.

5.(与夏仁龙、赵国松合作) 关于 $\mathbb{R}^3$ 中稳定极小曲面的一个注记，北京大学学报（自然科学版），一九八七年第 1 期，12-15.

6.$\mathbb{R}^3$ 中曲面的广义 Weierstrass 公式，数学学报，第 30 卷，第 3 期（1987 年 5 月），361-367.

7.Grassmann 流形作为子流形的微分几何，数学学报，第 31 卷，第 1 期（1988 年 1 月），46-53.

8. 常曲率空间中的管体积，数学学报，第 31 卷，第 2 期（1988 年 3 月），164-171.

9.(与吴光磊合作) 一个矩阵不等式及其几何应用，数学学报，第 31 卷，第 3 期（1988 年 5 月），348-355.

10. 关于管体积的比较定理，数学年刊，10A:4(1989), 391-397.

11.The mean curvature of the tubular hypersurface in a space of constant curvature, in: Differential Geometry and Topology, LNM1369, 49-62, Springer Verlag, 1989.

12. 曲面的三个基本形式之间的关系是定理的推论，数学的实践与认识，1990 年第 3 期，79-82.

13. 全微分方程的积分因子的存在性，数学的实践与认识，1990 年第 4 期，72-73.

14. 复 Grassmann 流形在球面中的等距嵌入，数学杂志，11(3)（1991），301-310.

15.On the comparison theorems for the volume of tubes in Kählerian manifolds, Chinese Quarterly J. of Math., 7(1992), 92-100.

16.The volume of tubes in complex space forms, Acta Mathematica Sinica, New Series, 8(3)(1992), 319-328.

17.Indefinite Kählerian manifolds and minimal surfaces, in: Differential Geometry, 7-22, Proc. of Symposium in Honor of Professor Su Buchin on his 90^{th} Birthday, World Scientific, 1993.

18.The Grassmannian manifolds with indefinite metrics, Acta Mathematica Sinica, New Series, 9(4)(1993), 406-413.

19.(With M. S. Rahman) Some theorems on a class of harmonic manifolds, Ganit(J. Bangladesh Math. Soc.) 14:1-2(1994), 5-12.

20. 仿射联络空间切丛之间的映射，数学进展，第 23 卷，第 2 期（1994 年 4 月），157-160.

21. 关于 3 维 Minkowski 空间中类空曲面的若干结果，数学学报，第 37 卷，第 3 期（1994 年 5 月），309-316.

22.The surfaces whose mean curvature vectors are eigenfunctions, 北京大学学报（自然科学版），第 30 卷，第 3 期（1994 年 5 月），258-263.

23.$\mathbb{R}^3$ 中自共轭极小曲面的特征，数学年刊，16A:5(1995), 561-571.

24.Characterization of self-conjugate minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, Chinese J. Contemporary Math., 16(4)(1995), 359-372.

25.(With M. S. Rahman) Some remarks on the symmetry of self-conjugate minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, Acta Mathematica Sinica, New Series, 12(2)(1996), 185-190.

26.(With H. Z. Li) Bonnet surfaces and isothermic surfaces, Results in Math., 312(1997), 40-52.

27.(With H. Z. Li) Weingarten surfaces and sine-Gordon equation, Science in China(series A), 40(10)(1997), 1028-1035.

28.(与李海中合作) Weingarten 曲面和 Sine-Gordon 方程，中国科学，A 辑第 27 卷，第 3 期（1997 年），595-601.

29.(With H. Z. Li) The Gauss map of spacelike surfaces in $\mathbb{R}^{2+p}_p$, Kyushu J. Math., 51(1997), 217-224.

30.(With H. Z. Li) Spacelike W-surfaces in $\mathbb{R}^3_1$ and the sine-Gordon equation, J. of Math. Anal. and Application, 214(1997), 459-474.

31.(With H. Z. Li) Integral formulas for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and their applications to Goddard's conjecture, Acta Mathematica Sinica, New Series, 14(1998), 285-288.

32.(与李海中合作) de Sitter 空间中紧致类空超曲面的积分公式及其 Goddard 猜想的应用，数学学报，第 41 卷（1998 年），807-810.

33.(With N. Su) Self-conjugate maximal surfaces in L^3, Northeast Math. J., 14(1998), 9-16.

34.(With H. Z. Li) Surfaces with spherical lines of curvature in $\mathbb{R}^3$, 数学进展，第 28 卷（1999 年），211-220.

35.(With H. Z. Li) The geometry of the dfifferential equations of the fourth order under

the contact transformations, 北京大学学报（自然科学版），第 35 卷，第 3 期（1999 年 5 月），285-296.

36.(With H. Z. Li) A remark on Bäcklund transformation of Weingarten surfaces, Northeast. Math. J., 15(3)(1999), 289-294.

37.(With Y. Fang) Self θ-congruent minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, J.Austral. Math. Soc.(Series A), 69(2000), 229-244.

38.(With H. Z. Li) On the classification of timelike Bonnet surfaces in L^3, in: Topology and Geometry of Submanifolds, Vol.X, 18-30, World Scientific, 2000.

39.(With J. H. Chen) The Möbius equivalent isothermic surfaces in S^3 and Bäcklund transformation, in: Differential Geometry and related Topics, 1-15, Proc. of the International Conference on Modern Mathematics and the International Symposium on Differential Geometry in Honor of Professor Su Buchin on the Centenary of his Birth, World Scientific, 2002.

40.(与郭震，陈建华合作) 保持高斯映射的仿射变形，数学学报，45（1）（2002），157-164.

41.(With H. Jin) Isometric immersions of indefinite space forms into indefinite space forms and soliton theory, Advances in Math., 32(2003), 449-460.

42. 足球的奥秘，数学通报，2004 年第 5 期，封 2-1.

43.(With Y. Y. Zang) The spectral transformation of CMC surfaces in S^3, 北京大学学报（自然科学版），第 41 卷，第 1 期（2005 年 1 月），36-46.

44.(With H. Z. Li and H. Ma) Isometric immersions of indefinite space forms in indefinite space forms, Advances in Mathematics, 34:6(2005), 693-706.

45.(With J. H. Chen) Generalized Weierstrass representations of surfaces in $\mathbb{R}^4$, J. Geometry and Physics, 57(2007), 367-378.

二. 专著和教材：

1.(与陈省身合著) 微分几何讲义，1983 年 12 月第一版，2001 年 10 月第二版，北京大学出版社.

2.(与陈省身合著) 微分几何讲义 (繁体字版)，1990 年，台湾联经出版社.

3. (S.S.Chern, W.H.Chen and K.S.Lam) Lectures on Differential Geometry, 1991，World Scientific(Singapore).

4. 微分几何初步,1990 年，北京大学出版社.

5．(与伍鸿熙合著) 黎曼几何选讲，1993 年，北京大学出版社；2020 年再版，高等教育出版社.

6．极小曲面，1993 年，湖南教育出版社；2011 年再版，大连理工大学出版社；2023 年 1 月精装本版，大连理工大学出版社.

7．微分流形初步，1998 年，2001 年第二版，高等教育出版社.

8．流形上的微积分，2003 年，高等教育出版社.

9．(与李兴校合著) 黎曼几何引论 (上册)，2002 年 12 月第一版，2023 年 6 月第二版，北京大学出版社。

10．(与李兴校合著) 黎曼几何引论 (下册)，2004 年，北京大学出版社.

11．微分几何，2006 年 6 月第一版，2017 年 8 月第二版，北京大学出版社.

12．微分几何例题详解和习题汇编，2010 年，高等教育出版社.

13．微分几何引论，2013 年，高等教育出版社.

三. 译作：

1．几何学的新探索，1986 年，北京大学出版社.

2．(与石生明合译) 几何学讲义第二学期：微分几何，1994 年，高等教育出版社.

四. 参与撰写的著作：

1．从大学数学走向现代数学：第六章. 从 Newton-Leibniz 公式到 Stokes 公式；第十三章. 从平坦的欧氏空间到弯曲的黎曼空间，2007 年，科学出版社.

2．中国大百科全书 (第二版)，2008 年，大百科全书出版社.

3．数学大辞典：十二. 微分几何学，2010 年第一版，2017 年 9 月第二版, 科学出版社.

陈维桓指导的研究生名录

(协助吴光磊先生指导) 秦兵　在学时间：1986～1989. 获得学位：硕士. 学位论文题目：截面曲率有界的黎曼流形中极小子流形的区域稳定性.

(协助吴光磊先生指导) 邓辉　在学时间：1986～1989. 获得学位：硕士. 学位论文题目：典型单连通不可约黎曼对称流形的截面曲率.

(协助吴光磊先生指导) 张春晖　在学时间：1986～1989. 获得学位：硕士. 学位论文题目：一个索波列夫不等式及其几何应用.

陆继坦　在学时间：1987～1990. 获得学位：硕士. 学位论文题目：$S^{n+p}(1)$ 及 $\mathbb{C}P^m$ 中的极小子流形的谱性质.

苏农　在学时间：1989～1992. 获得学位：硕士. 学位论文题目：Self-conjugate maximal surfaces in L^3.

靳紅　在学时间：1989～1992. 获得学位：硕士. 学位论文题目：不定 Kähler 流形中的 superminimal 曲面.

王焱平　在学时间：1990～1993. 获得学位：硕士. 学位论文题目：二维 Riemann 流形实现为极小曲面的度量特征.

余景干　在学时间：1991～1994. 获得学位：硕士. 学位论文题目：三维非正曲率流形的拓扑有限性.

唐工　在学时间：1991～1994. 获得学位：硕士. 学位论文题目：极小子流形的稳定性和指标.

王晓玮　在学时间：1992～1995. 获得学位：硕士. 学位论文题目：黎曼子流形的紧性定理与中曲率流的一些结果.

彭磐　在学时间：1996～1999. 获得学位：硕士. 学位论文题目：H^4 中的极小曲面.

董博　在学时间：1996～1999. 获得学位：硕士. 学位论文题目：MATHEMATICA 数学软件系统在曲线论和曲面论中的应用.

臧应运　在学时间：2000～2003. 获得学位：硕士. 学位论文题目：三维球面 S^3 中的 CMC 曲面的谱变换.

马辉　在学时间：1995～2000. 获得学位：博士. 学位论文题目：黎曼对称空间中的调和曲面和齐性曲面.

陈建华　在学时间：1997~2000. 获得学位：博士. 学位论文题目：关于常曲率空间中子流形的若干问题的研究.

靳紅　在学时间：1998~2003. 获得学位：博士. 学位论文题目：Riemann-Finsler 几何中的若干问题研究.