第一章、事件与概率

§1.1. 概率的含义

- 例1.1.11. 抛一枚硬币，“抛到正面”，频率的极限为1/2.

实验者	投币次数	出现正面次数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
克里奇	10000	5067	0.5067
皮尔逊	24000	12012	0.5005

- 例1.1.12. 投掷一枚色子，“出现1 点或2 点”，概率为1/3.

  例1.1.13. 抽签/抓阄，“抽到某特定竹签”，概率为$1/N$.

- 例1.1.15. 连续抛一枚硬币/色子(放回抽样).

  例1.1.16. 连续抽签(不放回抽样).

- 随机试验. 概率: 事件频率的极限、置信度.

§1.2. 样本空间与事件

- 样本(sample)/样本点: 一个试验结果, ω.
- 样本空间: 所有可能的试验结果组成的集合, 全集, Ω.
- 事件(event): “某些”子集, $A, B, C, \cdots$.
- 平凡的事件: Ω (必然事件), $\varnothing$.
- 事件A 发生: (本次)试验结果 $\omega \in A$.
- 事件: 关于样本的性质或要求.

- 例1.2.1. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,

$$\begin{aligned} A &= \text{“掷到小的点数”} = \{1,2,3\}, \\ B &= \text{“掷到偶数点数”} = \{2,4,6\}. \end{aligned}$$

- 例1.2.2. 连续抛n 次硬币/抛n 枚硬币.
  - $n=2$, $\Omega=\{\mathrm{HH},\mathrm{HT},\mathrm{TH},\mathrm{TT}\}$.

$$\begin{aligned} A &= \text{“有正面”} = \{\mathrm{HH},\mathrm{HT},\mathrm{TH}\}, \\ B &= \text{“正面数}\geqslant\text{反面数”} = \{\mathrm{HH},\mathrm{HT},\mathrm{TH}\}. \end{aligned}$$

  - $n=3$, $\hat{\Omega}$: 长为3 的H-T 字符串.

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \text{“有正面”} = \{\mathrm{HHH},\mathrm{HHT},\mathrm{HTH},\mathrm{HTT},\mathrm{THH},\mathrm{THT},\mathrm{TTH}\}, \\ \hat{B} &= \text{“正面数}\geqslant\text{反面数”} = \{\mathrm{HHH},\mathrm{HHT},\mathrm{HTH},\mathrm{THH}\}. \end{aligned}$$

集合/事件运算:

- 补事件/补集/余集, A^c.
- 并事件/并集: $A \cup B$.
- 交事件/交集: $A \cap B$, AB.
- A 与B 不相交/不相容: $AB = \emptyset$.
- 差事件/差集: $A \backslash B$.
- 交换律、结合律、分配律、对偶律, 维恩图.

一族子集的并集与交集:

- 并事件/并集:
  - 有限个:
    $$A_1\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{\omega: \exists\ 1\leqslant i\leqslant n \text{ 使得} \omega\in A_i\}.$$
  - 可列个: $A_1\cup A_2\cup\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{\omega: \exists\ i\geqslant 1 \text{ 使得} \omega\in A_i\}.$
  - 任意个: $\bigcup_{i\in I}A_i=\{\omega: \exists\ i\in I \text{ 使得} \omega\in A_i\}.$
- 交事件/交集:
  - 有限个: $A_1\cap\cdots\cap A_n$,
    $$A_1\cdots A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{\omega:\omega\in A_i, \forall\ 1\leqslant i\leqslant n\}.$$
  - 可列个: $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{\omega:\omega\in A_i,\ \forall\ i\geqslant 1\}.$
  - 交集: $\bigcap_{i\in I}A_i=\{\omega:\omega\in A_i,\ \forall\ i\in I\}.$
- 交换律、结合律、分配律、对偶律.

极限:

- 单调上升: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$.
- 若单调上升, 则令
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_n A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$
- 设$A_1, A_2, \cdots$ 为一列事件, 则$B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 单调上升, 且
$$\lim_n B_n = \bigcup_{i\geqslant 1} A_i.$$
- 单调下降: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$.
- 若单调下降, 则令
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$
- 设$A_1, A_2, \cdots$ 为一列事件, 则$B_n := \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 单调下降, 且
$$\lim_n B_n = \bigcap_{i\geqslant 1} A_i.$$

例1.2.3. 设$\Omega = [0,1]$.

- $A_i = \left[\frac{1}{i}, 1\right]$, 则$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0,1]$.
- $B_i = \left(0, \frac{1}{i}\right]$, 则$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \varnothing$,
- $C_i = \left[\frac{1}{2i}, \frac{1}{i}\right]$, 则$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = \left(\frac{1}{2n}, 1\right]$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = (0,1]$.
- $D_x = \{x\}$, 则$\bigcup_{x\in[0,1]} D_x = \Omega$, $\bigcup_{x\in I} D_x = I$.

§1.3 古典概率模型

- 有限样本空间: $\Omega = \{1, \cdots, n\}$.
  事件A 的概率定义为 $\mathrm{P}(A) := \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.
- 基于“对称性”假设, 或“公平性”假设.
- 不重不漏地数数: A_n^m, C_n^m.
- 抽样模型:
  放回抽样、不放回抽样、抽取与顺序无关、随机分组.
- 若尔当(Jordan)公式.
- 放球模型:
  球可分辨、混排模型(球不可分辨).

- 例1.3.3(放回抽样). N 个对象, 有放回地抽取n 次.
  - $\omega = (i_1, \cdots, i_n)$, $i_1, \cdots, i_n \in \{1, \cdots, N\}$.
- 例1.3.4(不放回抽样). N 个对象, 无放回地抽取n 次.
  - $\omega = (i_1, \cdots, i_n)$, $\star\star\star$ 且$i_1, \cdots, i_n$ 互不相等.
  - 例1.3.6. 一次性取n 个. $|\Omega| = C_N^n$.
- 例1.3.7 (随机分组). 将N 个对象随机分成r 组.
  - $N_1 + \cdots + N_r = N$. 可先分出第i 组.
- 例1.3.9. (生日问题). 将n 个可分辨的球放入N 个盒子.
  - 样本同上.

例1.3.5 (抽取与顺序无关) 现有N 个产品, 其中M 个是次品, 其余$N-M$ 个是合格品. 将所有产品随机地一个一个取出并进行检验. 求前n 个产品中恰有m 个次品的概率.

- 建模: 产品编号, 次品: $1,\cdots,M$, 合格品: $M+1,\cdots,N$.
  i_k: 队列中的第k 个产品的号码.
  $\omega=(i_1,\cdots,i_N)$ 为$1\sim N$ 的全排列, $|\Omega|=N!$.
- 重排: $\tau:(i_1,\cdots,i_N)\mapsto(i_{n_1},\cdots,i_{n_N})$, 一一映射.
- 可将第$n_1,\cdots,n_r$ 次视为第$1,\cdots,r$ 次.
- 另建模. k_i: 第i 号产品位于队列中的第k_i 个.
  $\tilde{\omega}=(k_1,\cdots,k_N)$ 为$1\sim N$ 的全排列.
  $\sigma:(i_1,\cdots,i_N)\leftrightarrow(k_1,\cdots,k_N)$, 一一映射.

例1.3.15(匹配问题). 现有n 双不同颜色的鞋, 将它们随机地进行左右配对. 求没有匹配成功的鞋的概率.

- 建模: 将鞋编号, 左鞋随机全排列, 与右鞋配对.
- B_i = "队列中排第i 的左鞋的颜色编号为i", $\mathrm{P}(B_i)=\dfrac{1}{n}$.
- $\mathrm{P}(B_{i_1}\cdots B_{i_k})=\dfrac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}=\dfrac{(n-k)!}{n!}$.
- 若尔当公式, $B:=B_1\cup\cdots\cup B_n$ 的概率为

$$\mathrm{P}(B)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathrm{P}\left(B_{i_1}\cdots B_{i_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\cdot\frac{(n-k)!}{n!}.$$

- A = "没有匹配成功的鞋",

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(B)=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

- 特别地, 当$k\to\infty$ 时, $\mathrm{P}(A)\to\mathrm{e}^{-1}$.

例1.3.14 (混排模型) 将n 位女生与m 位男生随机排成一列, 求任意两位女生都不相邻的概率. $(m \geqslant n-1 \geqslant 1.)$

- $(n+m)! = C_{n+m}^{n} n!m!$.
- 方法二. 将女生标记为“1”, 男生标记为“0”, 得到 0-1 字符串, 其中含n 个1 和m 个0.
- 球不可分辨的放球模型: 将m 个不可分辨的球放入$n+1$ 个盒子中. 样本同上.
- A = 不出现“11”的片段.
- $\tau: A \to \hat{A}$, 每两个1 之间去掉一个字符0, $\hat{A}$: 0-1 字符串, 其中含n 个1 和$m-(n-1)$ 个0.
- τ 为一一对应, 故$|A| = |\hat{A}| = C_{m+1}^{n}$.
- $\mathrm{P}(A) = C_{m+1}^{n}/C_{n+m}^{n}$.

例. 5 位男孩, 4 位女孩, 混排.

记B = “甲(男孩)排在所有女孩之前”, 求$\mathrm{P}(B)$.

- 建模: 女孩编号$1\sim 4$; 男孩编号$5\sim 9$, 其中, 甲为5 号.
- 模型1: $|\Omega| = 9! = 4!\times 5!\times C_9^4$,

$$\omega = 835261497 \mapsto (3214;\ 85697;\ 010101100).$$

- 模型2:

$$\omega = 835261497 \mapsto (\hat{\omega} = 35214;\ 8697;\ 011101100).$$

- 简化模型: $\omega \mapsto \hat{\omega}$,

$$B \to \hat{B} = \{5****\},\quad \mathrm{P}(B) = \hat{\mathrm{P}}(\hat{B}) = \frac{1}{5}.$$

§1.4 几何概率模型

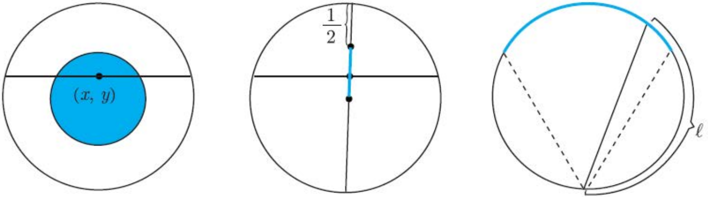
- 例1.4.1. (离散化逼近) 设$0 < a < b \leqslant 1$. 在$(0,1]$ 中随机取出一个数, 求它落在区间$(a,b]$ 中的概率.
  - 将$\Omega := (0,1]$ 均分为长度为$1/n$ 的小区间$I_1, \cdots, I_n$.
  - 将I_i 视为第i 个样本点, 得到古典概型.
  - 设$a \in I_i$, $b \in I_j$, 则$(j-i-1)/n \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant (j-i+1)/n$.
  - 令$n \to \infty$ 知$\mathrm{P}(A)$ 应为$b-a$.
  - 连续性: $A_k := (a+1/k, b-1/k]$ 单调上升到$A = (a,b]$. 此时$\mathrm{P}(A_k)$ 单调上升到$\mathrm{P}(A)$.
- 几何概率模型: Ω 为d 维区域, $|\Omega| < \infty$,

  A 为Ω 的子区域, "事件" A 的概率定义为$\mathrm{P}(A) := \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

例1.4.6. (贝特朗(Bertrand)悖论) 在单位圆周上随机取一条弦.

$$A = \text{“弦长大于}\sqrt{3}\text{”, 求} P(A).$$

- 三种解法.



(a) (b) (c)

图 1.3

- 概率: 权分配方案.

§1.5. 概率空间

一、σ 代数

- 例1.5.1. $\Omega = \{\mathrm{R}, \mathrm{O}, \mathrm{Y}, \mathrm{G}, \mathrm{B}, \mathrm{P}\}$.
  - 能否统计每个面出现的频率?
  - 能统计哪些事件出现的频率?
  - $\{O\}$ 可测, $\{R, B\}$ 不可测.
  - $\mathscr{G} = \left\{A : \mathrm{R}, \mathrm{G} \in A, \ \text{或}\mathrm{R}, \mathrm{G} \in A^c\right\}$, 可测集, 事件.
- 定义1.5.2. 设Ω 是样本空间, $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{T}_\Omega = \{A : A \subseteq \Omega\}$. 若

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(2) 补运算封闭: $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$;

(3) 可列并运算封闭: $A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \cdots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$,

则称$\mathscr{F}$ 是Ω 上的σ 代数/事件域, 称$(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间.

若$A \in \mathscr{F}$, 则称A 为事件, (关于$\mathscr{F}$) 可测.

- 最小的σ 代数: $\{\emptyset,\Omega\}$; 最大的σ 代数: $\mathscr{T}_\Omega$.
- $\mathscr{A}$ 生成的σ 代数: 包含$\mathscr{A}$ 的最小σ 代数,

$$\sigma(\mathscr{A}) = \bigcap_{\mathscr{G}\ \text{是}\sigma\text{代数},\ \mathscr{G}\supseteq\mathscr{A}} \mathscr{G}.$$

- 例1.5.5. (离散型). A_i, $i\in I$, 是Ω 的(可数)划分, 其中$I=\{1,\cdots,n\}$ 或$\{1,2,\cdots\}$.

$$\mathscr{A}=\{A_i: i\in I\},\quad \mathscr{F}=\sigma(\mathscr{A})=\left\{\bigcup_{i\in J}A_i : J\subseteq I\right\}.$$

称A_i, $i\in I$, 为基本事件/基本集.

例1.5.6. Borel σ 代数: 开集生成的σ 代数.

- $\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathbb{R})=\sigma(\mathscr{P})=\sigma(\mathscr{Q})=\sigma(\mathscr{R})$,

$$\mathscr{P}=\Big\{(-\infty,a]:a\in\mathbb{R}\Big\},\quad \mathscr{Q}=\Big\{(a,b]:\cdots\Big\},\quad \mathscr{R}=\Big\{(a,b):\cdots\Big\}.$$

- 没有“基本事件”:
  - $\{x\}\in\mathscr{B}$, $\forall x$.
  - $\mathscr{A}=\{\{x\},x\in\mathbb{R}\}$, 求$\sigma(\mathscr{A})$.
- $\mathscr{B}([0,1])=\{B\cap[0,1]:B\in\mathscr{B}\}$.
- $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)=\sigma(\mathscr{P}_d)=\sigma(\mathscr{Q}_d)=\sigma(\mathscr{R}_d)=\sigma(\mathscr{S}_d)$,

$$\mathscr{P}_d=\left\{\prod_{i=1}^{d}(-\infty,a_i]:a_1,\cdots,a_d\in\mathbb{R}\right\},\quad \mathscr{S}_d=\Big\{B(\vec{x},r):\vec{x}\in\mathbb{R}^d,r>0\Big\}.$$

二、概率的定义及其性质

- 概率: 权分配方案. 数学对象: 事件的函数P : $A \mapsto \mathrm{P}(A)$.
- 频率/古典/几何概型:

(1) 非负性: $\mathrm{P}(A) \geqslant 0$.

(2) 规范性: $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, 归一化.

(3) 可加性: $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

$$\mathrm{P}(A_1 + \cdots + A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n).$$

(4) 下连续性: 若$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, 则

$$\mathrm{P}\left(\lim_n A_n\right) = \lim_n \mathrm{P}\left(A_n\right).$$

- 引理1.5.7. 设$\mathrm{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ 满足(1), (2), 则(3) & (4) $\Leftrightarrow$ (5),

(5) 可列可加性: 若$A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1, 2, \cdots$, 两两不交, 则

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

(5) 可列可加性 $\Rightarrow$ (3) 可加性, (4) 下连续性 的证明.

- 取$A_n = \varnothing, \forall n$ 推出$\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.
- 取$A_m = \varnothing, \forall m \geqslant n+1$ 推出(3) 可加性.
- 设$A_1, A_2, \cdots$ 是一列事件.
  令$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, 则$B_1, B_2, \cdots$ 两两不交.
- $A_1 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$,
  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, 而由★★, $\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(B_n)$.
- 又设$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$,
  则$B_1 = A_1$; $\forall n \geqslant 2$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$;

$$\mathrm{P}\left(\lim_n A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(B_i) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B_i) = \lim_n \mathrm{P}(A_n).$$

- 定义1.5.8. 设$\mathrm{P}:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$ 满足

  (1) 非负性: $\mathrm{P}(A)\geqslant 0, \forall A\in\mathscr{F}$,

  (2) 规范性: $\mathrm{P}(\Omega)=1$,

  (3) 可列可加性: 若$A_n\in\mathscr{F}$, $n=1,2,\cdots$, 两两不交, 则

  $$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_n),$$

  则称P 为$(\Omega,\mathscr{F})$ (或Ω)上的概率, 称$(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$ 为概率空间.

- 注1.5.9. 测度: $\mu:\mathscr{F}\to[0,\infty]$, 满足非负性, 可列可加性.

- Ω: 样本空间; $(\Omega,\mathscr{F})$: 可测空间; $(\Omega,\mathscr{F},P)$: 概率空间.

- 以概率p 发生: $\mathrm{P}(A)=p$;

  几乎必然发生/以概率1 发生: $\mathrm{P}(A)=1$;

  零概率事件/零测集: $\mathrm{P}(A)=0$, $\mu(A)=0$;

  正概率事件: $\mathrm{P}(A)>0$.

补充知识2. 勒贝格测度与几何概型.

- $B \in \mathscr{B}$, $x \in \mathbb{R}$, 记$B + x = \{y + x : y \in B\}$.
- 在$(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ 上存在唯一的测度λ (勒贝格测度)满足

$$\lambda([a,b]) = b - a, \qquad \lambda(B) = \lambda(B + x),\ \forall B \in \mathscr{B},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

- 例. $[0,1]$ 上的几何概型指:

$$\Omega = [0,1], \quad \mathscr{F} = \mathscr{B}([0,1]), \quad \mathrm{P} = \lambda|_{[0,1]}.$$

- 取$\mathscr{F} = [0,1]$ 上所有Lebesgue可测集亦可.
- 取$\mathscr{F} = 2^{[0,1]}$? (可以证明, 存在非Lebesgue可测集.)
- d 维类似.

概率的性质(命题1.5.10及其推论):

- 次可列可加性: $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$.
- $\mathrm{P}(A_n) = 0,\ \forall n \Rightarrow \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$;

  $\mathrm{P}(A_n) = 1,\ \forall n \Rightarrow \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.
- 若尔当(Jordan)公式:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(A_i\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{P}\left(A_i A_j\right) + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathrm{P}\left(A_{i_1}\cdots A_{i_k}\right).\end{aligned}$$

例1.5.14. 离散型概率空间.

- $\Omega = \{\omega_i : i \in I\}$ 可数, $I = \{1, \cdots, n\}$ 或$\{1, 2, \cdots\}$.
- $\mathscr{F} = \mathscr{T}_\Omega$, $\mathscr{A} = \{\{\omega_i\} : i \in I\}$, $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A}_i)$.
- 分布列$\{p_i : i \in I\}$: $p_i \geqslant 0$, $\forall i$; $\sum\limits_{i \in A} p_i = 1$.
- $\mathrm{P}(\{i\}) = p_i, \forall i \Leftrightarrow \mathrm{P}(A) = \sum\limits_{i:\omega_i \in A} p_i, \forall A \in \mathscr{F}$.
- 设$\hat{\mathscr{A}} = \{A_i : i \in I\}$ 为$\hat{\Omega}$ 的划分, $\hat{\mathscr{F}} = \sigma(\hat{\mathscr{A}})$, 将基本集$A_i$ 视为$\{i\}$ 即可.

例1.5.15. $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathscr{F} = \mathscr{T}_\Omega$. 取$A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$. 求所有满足$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1/2$ 的概率.

- 求分布列$\{p_i : i = 1,2,3,4\}$, 满足
$$p_1 + p_2 = 1/2, \quad p_1 + p_3 = 1/2.$$
- 解得$p_1 = p_4 = a$; $p_2 = p_3 = \frac{1}{2} - a$, $a \in [0, 1/2]$.
- 令$\mathscr{A} = \{A, B\}$. $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{F}$, 但$\mathrm{P}|_{\mathscr{A}} \to \mathrm{P}$ 的扩张不唯一.
- π 系: 非空; 若$A, B \in \mathscr{A}$, 则$AB \in \mathscr{A}$.

  定理: $\mathscr{A}$ 是π 系, 则$\mathrm{P}|_{\mathscr{A}} \to \mathrm{P}$ 的扩张(若存在, 则)是唯一的.

- 推论1.5.16. 设μ_1 与μ_2 都是$(\mathbb{R},\mathscr{B})$ 上的分布/概率测度. 若$\mu_1|_{\mathscr{P}}=\mu_2|_{\mathscr{P}}$, 则$\mu_1\equiv\mu_2$.
- $\mu|_{\mathscr{P}}$: $F(x)=\mu((-\infty,x])$ 为分布函数(满足相容性):

$$F\nearrow;\quad F(-\infty)=0,\ F(\infty)=1;\quad F(x+)=F(x),$$

则$\mu|_{\mathscr{P}}\to\mu$ 的扩张存在.

§1.6 条件概率

一、条件概率的定义

- 定义1.6.1. 设$A \in \mathscr{F}$ 且$\mathrm{P}(A) > 0$. 对任意$B \in \mathscr{F}$, 称$\mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(A)$ 为在A 发生的条件下B 的条件概率, 记为$\mathrm{P}(B|A)$ 或$\mathrm{P}_A(B)$.
- 在“范围”A 内, “性质”B 的权重的相对百分比.

例1.6.2. 有10 个球, 5 个玻璃球(2 黑, 3 红), 5 个木球(4 黑, 1 红). 从中任取一个. 已知抓到黑球. 求此球是玻璃球的条件概率.

- $|A| = 6$, $|AB| = 2$, $|AB|/|B| = 2/6$.

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{|AB|/|\Omega|}{|A|/|\Omega|} = \frac{|AB|}{|A|} = \frac{1}{3}.$$

- $\mathrm{P}(B|A^c) > \mathrm{P}(B) > \mathrm{P}(B|A^c)$.
- $\mathscr{G} = \{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$,
  辨色能力.
- $\mathrm{P}(A|B) < \mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(A|B^c)$.
- $\mathscr{H} = \{\varnothing, \Omega, B, B^c\}$,
  触觉能力.

	玻璃	木质	
黑	2	4	6
红	3	1	4
	5	5	10

- 命题1.6.3. $\mathrm{P}_A(\cdot) = \mathrm{P}(\cdot|A)$ 满足概率定义的三个条件.
- 新的权重分配方案, $\mathrm{P}_A(B) = \frac{1}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(AB)$,

  (1) 在A 之外: 权重不分给A^c;

  (2) 在A 之内: 新的权分配与原始权分配成正比.
  对任意$B \subseteq A$, $\mathrm{P}_A(B) = \alpha\mathrm{P}(B)$. 其中$\alpha = 1/\mathrm{P}(A)$.
- 已知A 发生, 假设A 成立, 若A 发生, 在A 中, $\cdots\cdots$,
  之后的“概率”指条件概率P_A, 而不是原始概率P.
- 应用一、按照定义直接计算$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(A)$.
  例. 若P 是古典概型, 则P_A 是以A 为样本空间的古典概型.
- 应用二、乘法公式.

二、乘法公式

- 分析P_A: 在假设A 发生时, 简化模型, 获得$\mathrm{P}(B|A)$.

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A).$$

- n 个事件的乘法公式:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_1 \cdots A_n) &= \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1A_2)\cdots \\ &\quad \cdot \mathrm{P}(A_n|A_1\cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

例1.6.7. 将52 张牌随机均分四组, 求每组都有K的概率.

- 解: $A = E_1E_2E_3E_4$, 其中$E_i =$ "第i 组有K" .

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}(E_2|E_1)\mathrm{P}(E_3|E_1E_2)\mathrm{P}(E_4|E_1E_2E_3) = ?$$

- 方法一、$A = A_1A_2A_3$, 其中$A_i =$ "第i 组有且仅有一个K" .

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \frac{C_4^1C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}} \cdot \frac{C_3^1C_{36}^{12}}{C_{39}^{13}} \cdot \frac{C_2^1C_{24}^{12}}{C_{26}^{13}} \\ &= \frac{39 \cdot 38 \cdot 37}{51 \cdot 50 \cdot 49} \cdot \frac{26 \cdot 25}{38 \cdot 37} \cdot \frac{13}{25} == \frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49}.\end{aligned}$$

- 方法二、依次观察桃K、杏K、梅K、方K, $A = B_1 B_2 B_3$.

  (1) B_1 = 红桃K 与黑桃K 不在一组;

  (2) B_2 = 梅花K与黑桃K、红桃K 都不在同一组中;

  (3) B_3 = 四张K 在四个不同组中.

- 由乘法公式,

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(B_2|B_1)\mathrm{P}(B_3|B_2) = \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49}.$$

例1.6.8. 波利亚坛子(Polya Urn):

最初有b 个黑球, r 个红球. 每次取一个, 放回并放入c 个同色球.

- $c=0$: 放回抽样;

  $c=-1$: 不放回抽样, 最多操作$b+r$ 次.

- 操作五次, 求(1) $\mathrm{P}(B_1R_2R_3B_4R_5)$; (2) $\mathrm{P}(B_5)$, 其中

$$B_n = \text{“第}n\text{ 次抽到黑球”}, \quad R_n = B_n^c.$$

- 解: BRRBR $=B_1R_2R_3B_4R_5$, RRBRB $=R_1R_2B_3R_4B_5$.

- (1) P(BRRBR):

$$\frac{br(r+c)(b+c)(r+2c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)(b+r+3c)(b+r+4c)}.$$

- P(RRBRB):

$$\frac{r(r+c)b(r+2c)(b+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)(b+r+3c)(b+r+4c)}.$$

- 可交换性: BRRBR, RRBRB, RBRBR, BRRRB, $\cdots$
  这C_5^2 个事件的概率都相等.
- $c=-1$ 时即为抽取与顺序无关(例1.3.5).
- B_5 可划分为$\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2\mathrm{L}_3\mathrm{L}_4\mathrm{B}$, 其中$\mathrm{L}_i \in \{\mathrm{B},\mathrm{R}\}$.
- $\mathrm{P}(\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2\mathrm{L}_3\mathrm{L}_4\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2\mathrm{L}_3\mathrm{L}_4)$.
- $\mathrm{B}\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2\mathrm{L}_3\mathrm{L}_4$, $(\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_3,\mathrm{L}_4 \in \{\mathrm{B},\mathrm{R}\})$, 为$B_1$ 的划分.
- $\mathrm{P}(B_5) = b/(b+r)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B_5) &= \sum_{\mathrm{L}_i\in\{\mathrm{B},\mathrm{R}\},i=1,2,3,4} \mathrm{P}(\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2\mathrm{L}_3\mathrm{L}_4\mathrm{B}) \\ &= \sum_{\mathrm{L}_i\in\{\mathrm{B},\mathrm{R}\},i=1,2,3,4} \mathrm{P}(\mathrm{B}\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2\mathrm{L}_3\mathrm{L}_4) = \mathrm{P}(B_1) = \frac{b}{b+r}.\end{aligned}$$

例1.6.9. 现有n 双不同颜色的鞋, 将它们随机地进行左右配对. 求恰有k 双匹配成功的概率.

- 将A_k 按是哪k 双匹配成功划分为B_i, $i = 1, \cdots, C_n^k$.
- $B_1 = CD$, 其中$C =$ "前k 双匹配成功",
  $D =$ "后$n-k$ 种颜色的鞋均匹配不成功".
- $\mathrm{P}(C) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$.
- $\mathrm{P}(D|C) = \sum\limits_{j=0}^{n-k}(-1)^j\dfrac{1}{j!}$, (参见例1.3.15.)
- $\mathrm{P}(A_k) = C_n^k\mathrm{P}(B_1) = C_n^k\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D|C) = \dfrac{1}{k!}\sum\limits_{j=0}^{n-k}(-1)^j\dfrac{1}{j!}$.
- 令$p_{n,k} = \mathrm{P}(A_k)$, 则$kp_{n,k} = p_{n',k'}$, 其中$x' = x-1$.
  故$\sum\limits_{k=0}^{n} kp_{n,k} = \sum\limits_{k=1}^{n} kp_{n,k} = \sum\limits_{k'=0}^{n'} p_{n',k'} = 1$.

三、条件概率$\mathrm{P}_A(\cdot)$ 的条件概率

- $\mathrm{P}_A(C|B) = \mathrm{P}(C|AB)$:

$$\mathrm{P}_A(C|B) = \frac{\mathrm{P}_A(BC)}{\mathrm{P}_A(B)} = \frac{\mathrm{P}(ABC)/\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(A)} = \mathrm{P}(C|AB).$$

- 例1.6.10. 现有N 个产品, 其中有M 个次品, 其余$N-M$ 个是合格品. 放回/不放回抽取两次. 求在第一次抽到次品的条件下, 第二次抽到次品的(条件)概率.
  - 放回抽样, $\mathrm{P}(\cdot)$: $\Omega = \{(i,j) : 1 \leqslant i, j \leqslant N\}$ 上的古典概型.
  - $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{|AB|}{|A|} = \dfrac{M^2}{MN} = \dfrac{M}{N}$.
  - 不放回抽样, $\mathrm{P}_C(\cdot)$: $C = \{(i,j) \in \Omega : i \neq j\}$.
  - $\mathrm{P}_C(B|A) = \dfrac{|ABC|}{|AC|} = \dfrac{M(M-1)}{M(N-1)} = \dfrac{M-1}{N-1}$.

§1.7 全概率公式和贝叶斯公式

一、全概率公式

- 非平凡划分: $\{A_i : i \in I\}$ 是Ω 的一个可数划分且$\mathrm{P}(A_i) > 0$.
- 定理1.7.1(全概率公式).

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i).$$

  - 证: $\mathrm{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(BA_i) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)$.
  - 思想: 分情况讨论.
- 划分可改为要求$\mathrm{P}(A_iA_j) = 0$, $\sum_{i \in I} \mathrm{P}(A_i) = 1$.
- 推论1.7.2. 设$\mathrm{P}(A) > 0$.

  (1) $\mathrm{P}_A(B) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}_A(A_i)\mathrm{P}_A(B|A_i)$.

  (2) Ω 或A 的非平凡划分, $\mathrm{P}(B|A_i) \equiv p$, 则$\mathrm{P}(B|A) = p$.

例1.7.4. 将52 张牌随机均分两组. 从第一组中取一张(下称“旧牌”), 发现它是K, 将之放入第二组. 再从第二组(共27 张牌)中取出一张(下称“新牌”), 求新牌是K的概率.

- 错误解答: 记A_n =“第二组原有的26张牌中有n 张K”.

$$\mathrm{P}(A_n) = \frac{C_4^n C_{48}^{26-n}}{C_{52}^{26}}, \quad \mathrm{P}(A|B_n) = \frac{n+1}{27}.$$

所求为 $\mathrm{P}(A) = \sum_{n=0}^{3} \frac{C_4^n C_{48}^{26-n}}{C_{52}^{26}} \cdot \frac{n+1}{27}$.

- A = “旧牌是K”, B = “新牌是K”, 所求为$\mathrm{P}_A(B)$.
- 在A 发生的条件下, 新模型为: 将51 张牌(仅3 张K)随机均分两组(25 + 26), 从旧牌与第二组(共27 张牌)中取出新牌.

- 方法一、

$$\mathrm{P}_A(A_n) = \frac{C_3^n C_{48}^{26-n}}{C_{51}^{26}}, \quad \mathrm{P}(A|B_n) = \frac{n+1}{27}.$$

故

$$\mathrm{P}_A(B) = \sum_{n=0}^{4} \mathrm{P}_A(A_n)\mathrm{P}_A(B|A_n) = \cdots = \frac{43}{459}.$$

- 方法二、C = “新牌即为旧牌”.

$$\mathrm{P}_A(C) = \frac{1}{27}, \quad \mathrm{P}_A(B|C) = 1;$$
$$\mathrm{P}_A(C^c) = \frac{26}{27}, \quad \mathrm{P}_A(B|C^c) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}.$$

故

$$\mathrm{P}_A(B) = \frac{1}{27} + \frac{26}{27} \cdot \frac{1}{17} = \frac{17+26}{27 \cdot 17} = \frac{43}{27 \cdot 17}.$$

例1.7.5. 在波利亚坛子模型中, 求$\mathrm{P}(B_n)$.

- 取定c. 模型参数为b, r 时, 答案记为$f(b,r;n)$.
- 首步分析法: 由全概率公式,

$$f(b,r;n) = \frac{b}{b+r}\cdot f(b+c,r;n-1) + \frac{r}{b+r}\cdot f(b,r+c;n-1).$$

- $n=1$ 时, $f(b,r,1) = \dfrac{b}{b+r}$.
- 用数学归纳法验证: $f(b,r;n) = \dfrac{b}{b+r}$.

$$f(b,r;n) = \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{(b+c)+r} + \frac{r}{b+r}\cdot\frac{b}{b+(r+c)} = \frac{b}{b+r}.$$

例1.7.6. 50 元一张票. m 人持50 元钞票, n 人持100 元钞票, 随机排队买票. 求售票员无需提前预备零钱的概率 $p_{m,n}$.

- 分析队尾: 由全概率公式,

$$p_{m,n}=\frac{m}{m+n}p_{m-1,n}+\frac{n}{m+n}p_{m,n-1},\quad m\geqslant n.$$

- 边界条件: 当$m<n$ 时, $p_{m,n}=0$.
- 用归纳法验证: 当$m\geqslant n$ 时, $p_{m,n}=1-\dfrac{n}{m+1}$.
- 补(投票定理): 甲、乙两人竞选学生会主席, N 位同学投票, 甲比乙多i 票. 求唱票过程中甲保持领先的概率$q_{N,i}$.
  - A 发生蕴涵着$B=$ "第一票支持甲" 发生.
  - 甲有$\dfrac{N+i}{2}\triangleq 1+m$ 票, 乙有$\dfrac{N-i}{2}\triangleq n$ 票. $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1+m}{N}$.
  - $\mathrm{P}(A|B)=p_{m,n}$, 故$q_{N,i}=\dfrac{1+m}{N}\cdot p_{m,n}=\dfrac{i}{N}$.

例1.7.7(三门问题). n 扇门, m 扇后有奖, $n-m$ 扇空门, $1 \leqslant m \leqslant n-2$. 先猜一扇(旧门), 然后主持人在剩余的空门中随机选一扇打开. 以下哪个策略好?

策略1: 坚持选旧门.

策略2: 在旧门和主持人打开的门之外随机选一扇新门.

- 用全概公式解答.
- 建模, 计算每个样本的权重.
- 在模型中解释旧门与新门不对等.

二、贝叶斯公式

- 定理1.7.9(贝叶斯公式). 设$\{A_i : i \in I\}$ 是Ω 的非平凡划分. 若$\mathrm{P}(B) > 0$, 则

$$\mathrm{P}(A_i|B) = \frac{\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)}{\sum\limits_{j\in I} \mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j)}.$$

  - 推导/计算: $\mathrm{P}(A_i|B) = \frac{\mathrm{P}(A_iB)}{\mathrm{P}(B)}$ & 乘法公式& 全概公式.

- 划分可改为要求$\mathrm{P}(A_iA_j) = 0$, $\sum\limits_{i\in I} \mathrm{P}(A_i) = 1$.
- 逆概率公式, 先验概率 vs 后验概率.
- B 是显明的, A_i 是隐藏的.

$$\mathscr{G} = \{\varnothing, B, B^c, \Omega\}.\ A_i \in \mathscr{F},\ \text{但} A_i \notin \mathscr{G}.$$

例1.7.10. 用某检测法, 患病者测出阳性的概率为$a = 0.95$; 非患者测出阴性的概率为$b = 0.9$. 某人在患病人数比例为$p = 0.001$的地区, 其检测报告为阳性. 试问: 他患病的概率是多大?

- 记$A =$ "患病", $B =$ "检测报告为阳性".
- $\mathrm{P}(A) = p$, $\mathrm{P}(B|A) = a$, $\mathrm{P}(B|A^c) = 1 - b$.
- 由贝叶斯公式,

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{pa}{pa + (1-p)(1-b)} = \frac{pa}{p(a+b-1) + (1-b)}.$$

- 代入具体的值后得到$\mathrm{P}(A|B) = 0.00942$.
- $f(p) = \dfrac{pa}{p(a+b-1) + (1-b)}$ 关于$p \nearrow$.
- 思考题: 若再次复查是阳性, 此人有肝癌的概率是多少?

§1.8 独立性

一、事件的独立性

- 例1.8.1. N 个产品, 其中M 个是次品. 放回/不放回抽取两次, 求在第一次抽到次品的条件下, 第二次抽到次品的概率.
  - 放回抽样, P: $\Omega = \{(i,j) : 1 \leqslant i,j \leqslant N\}$ 上的古典概型.
    不放回抽样, P_C: $C = \{(i,j) : i \neq j\}$.
  - $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B|A^c) = \mathrm{P}(B) = M/N$;
    $\mathrm{P}_C(B|A) = (M-1)/(N-1) < M/N = \mathrm{P}_C(B)$.
- 直观: $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)$, A 发生(与否)不改变B 的概率.
- 定义1.8.2. 若$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, 则称$A$ 与B (在概率P下)相互独立(independent).
- 正相关$\mathrm{P}(AB) \geqslant \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ vs 负相关$\mathrm{P}(AB) \leqslant \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

例1.8.4. “石头、剪刀、布”游戏.

$$A = \text{“甲出剪刀”},\quad B = \text{“乙出布”},\quad C = \text{“甲赢”}.$$

- 样本:
$$\begin{array}{lll} (0,0) & (0,2)_C & (0,5)_B \\ (2,0)_A & (2,2)_A & (2,5)_{A,B,C} \\ (5,0)_C & (5,2) & (5,5)_B \end{array}$$

- A, B, C 两两独立:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = \frac{1}{3},$$
$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(AC) = \mathrm{P}(BC) = \frac{1}{9}.$$

- 但$\mathrm{P}(C|AB) = 1$.
- 补: $\mathrm{P}(C|AB) = \mathrm{P}(C) \Leftrightarrow \mathrm{P}(ABC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.

- 定义1.8.5. 三个事件. 两两独立.
  又若$\mathrm{P}(ABC)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$, 则称它们相互独立.
- 定义1.8.6. n 个事件. 两两独立.
  若$\forall k\leqslant n$, $\forall 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$,
  $$\mathrm{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=\mathrm{P}(A_{i_1})\cdots\mathrm{P}(A_{i_k}),$$
  则称它们相互独立.
- 定义1.8.7. 一列事件两两独立.
  若$\forall n\geqslant 2$, $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立, 则称$A_1,A_2,\cdots$ 相互独立.
- 总结: 两两独立指$\mathrm{P}(A_iA_j)=\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(A_j)$, $\forall i\neq j$;
  相互独立指任意有限个事件交集的概率= 概率的乘积.

- 设$A_1, \cdots, A_n$ 相互独立, 则
  - B_i 取A_i 或A_i^c, 则$B_1, \cdots, B_n$ 相互独立;
  - $\forall 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$, $A_{j_1}, \cdots, A_{j_k}$ 相互独立;
  - $(A_1A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立;
  - $(A_1 \cup A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立.
- 独立性的应用:

  一、验证独立性; 二、假设独立性.

例1.8.8. $A_i =$"第i 个元件可靠". A_i, $i \in I$ 相互独立, $\mathrm{P}(A_i) \equiv p$. 求P(系统可靠).

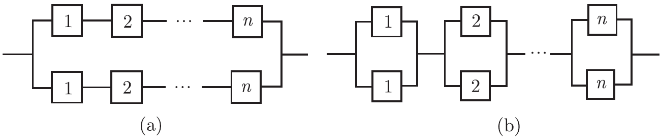


图 1.4

- $B_1 = A_1 \cdots A_n, \quad B_2 = A_{n+1} \cdots A_{2n}.$

  $R_a = \mathrm{P}(B_1 \cup B_2) = \mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(B_2) - \mathrm{P}(B_1 B_2)$ (若尔当)

  $= p^n + p^n - p^{2n} = p^n(2 - p^n).$

- $C_i = A_{2i-1} \cup A_{2i}$, $\mathrm{P}(C_i) = 1 - (1-p)^2 = p(2-p)$. (对偶律)

  $R_b = \mathrm{P}(C_1 \cdots C_n) = p^n(2-p)^n.$

- $2 - p^n < (2-p)^n$, (b) 更可靠.

二、相互独立的小试验

- n 个(小)试验:

$$(\Omega_i, \mathscr{F}_i, P_i): \text{ 第}i\text{ 个小试验}, \ i = 1, \cdots, n.$$

- 大试验的样本空间:

$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n, \quad \omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n).$$

- 关于第i 个小试验的事件: $\forall \tilde{A}_i \in \mathscr{F}_i$,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i \hookrightarrow A_i &= \{\omega : \omega_i \in \tilde{A}_i\} \\ &= \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times \tilde{A}_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n. \end{aligned}$$

  - 例1.8.4. “石头、剪刀、布” 游戏. $\Omega_1 = \Omega_2 = \{0, 2, 5\}$.
    甲出剪刀: $\tilde{A}_1 = \{2\} \hookrightarrow A_i = \{(2,0), (2,2), (2,5)\}$.

- 大试验中的σ 代数:

$$\mathscr{F} = \sigma(\{A_i : \tilde{A}_i \in \mathscr{F}_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}).$$

- 大试验中的概率(乘积概率测度):
  $(\Omega, \mathscr{F})$ 上存在唯一的概率P 满足:

  (1) 与小试验相容:

$$\mathrm{P}(A_i) = \mathrm{P}_i(\tilde{A}_i), \quad \forall \tilde{A}_i \in \mathscr{F}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

  (2) 小试验相互独立: $\forall \tilde{A}_i \in \mathscr{F}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$

$$\mathrm{P}(\underline{A_1 \cdots A_n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i), \quad \mathrm{P}(\underline{\tilde{A}_1 \times \cdots \times \tilde{A}_n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(\tilde{A}_i).$$

- 相互独立的小试验指$(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$.
- 相互独立的一列小试验类似.

例1.8.10 & 1.8.11. N 个产品, 其中有M 个是次品. 放回/不放回抽取两次, 研究两个小试验的独立性.

- 两个小试验: $\Omega_i = \{1, \cdots, N\}$, P_i 对应古典概型, $i = 1, 2$.
- 大试验的样本空间$\Omega = \{(i,j) : i, j \in \{1, \cdots, N\}\}$.
  - 第一次抽取结果: $\tilde{A}_k = \{k\} \hookrightarrow A_k = \{(k,1), \cdots, (k,N)\}$.
  - 第二次抽取结果: $\tilde{B}_k = \{k\} \hookrightarrow B_k = \{(1,k), \cdots, (N,k)\}$.
- 放回抽样P. 相容、独立.

$$\mathrm{P}(A_iB_j) = \frac{1}{n^2} = \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B_j), \quad \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

- 不放回抽样P_C, $C = \{(i,j) \in \Omega : i \neq j\}$. 相容、不独立.

$$\mathrm{P}_C(A_i) = \mathrm{P}_1(\tilde{A}_i), \; \mathrm{P}_C(A_iB_j) \neq \mathrm{P}_C(A_i)\mathrm{P}_C(B_j).$$

- P_A, $A = \{(i,j) : i \leqslant j\}$. 不相容.

$$\mathrm{P}_A(B_k) = \frac{k}{N(N+1)/2} \neq \mathrm{P}_2(\tilde{B}_k).$$

例1.8.12. 将n 位女生与m 位男生随机排成一列. 研究独立性.

- 模型: 三个相互独立的小试验, $|\Omega| = C_{n+m}^{n} \cdot n! \cdot m!$.
- 将男生视为隔板,
  女生视为可分辨的球.
- $\Omega_1 \times \Omega_2$ 翻译为
  将n 个可分辨的球
  放入$m+1$ 个盒子中.
  如何放?

字符串	001	010	100
混排	①②| ②①|	①|② ②|①	|①② |②①
可分辨	①②|	①|② ②|①	|①②

- 例. $m = 1$, $n = 2$.
- A_i = "第i 个球在第一个盒子中". $\mathrm{P}(A_i) = \dfrac{1}{m+1}$,

$$\mathrm{P}(A_1A_2) = \frac{2}{(m+2)(m+1)} > \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2).$$

三、重复独立试验

例1.8.13. 成功率为p 的伯努利(Bernoulli)试验: 抛硬币.

- ω: 无穷长(或有限长)的H-T 字符串.

$$H_n = \text{“第}n\text{ 次为H”}, \quad T_n = H_n^c.$$

- $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} H_n \nearrow B = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$. $\mathrm{P}(B) = 1$:

$$\mathrm{P}(B_N) = 1 - \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} T_n\right) = 1 - (1-p)^N \nearrow 1.$$

- (重复试验中)正概率事件一定(几乎必然)发生.
- 以概率1, 所有单词都出现.

例1.8.14. 设小试验中事件E, F 不相容, 概率分别为p, q, 均为正. 求重复独立试验中事件$B =$ “E 先发生” 的概率.

- $E_n =$ “第n 次小试验中E 发生”; F_n; $G_n = E_n \cup F_n$.
- $A_n = G_1^c \cdots G_{n-1}^c G_n$, $\mathrm{P}(A_n) = (1-p-q)^{n-1}(p+q)$.
- $B_n = BA_n = G_1^c \cdots G_{n-1}^c E_n$, $\mathrm{P}(B_n) = (1-p-q)^{n-1}p$.
- $\mathrm{P}(B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(B_n) = \dfrac{p}{p+q}$.
- B 与A_n 独立:

$$\mathrm{P}(BA_n) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A_n).$$